سفر به آینده

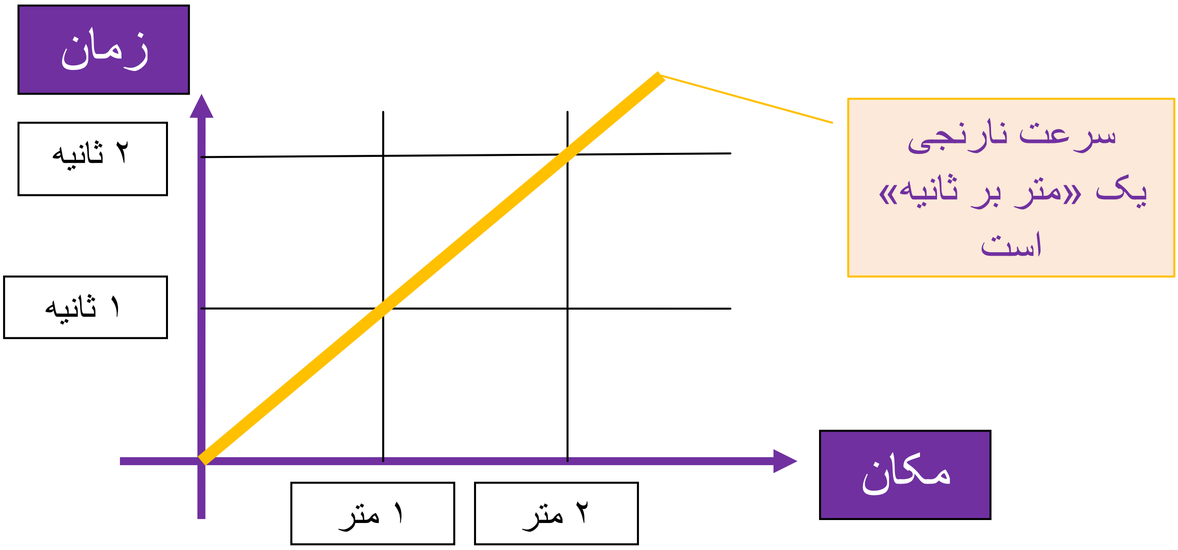
فرهنگ لران

دانشگاه صنعتی اصفهان

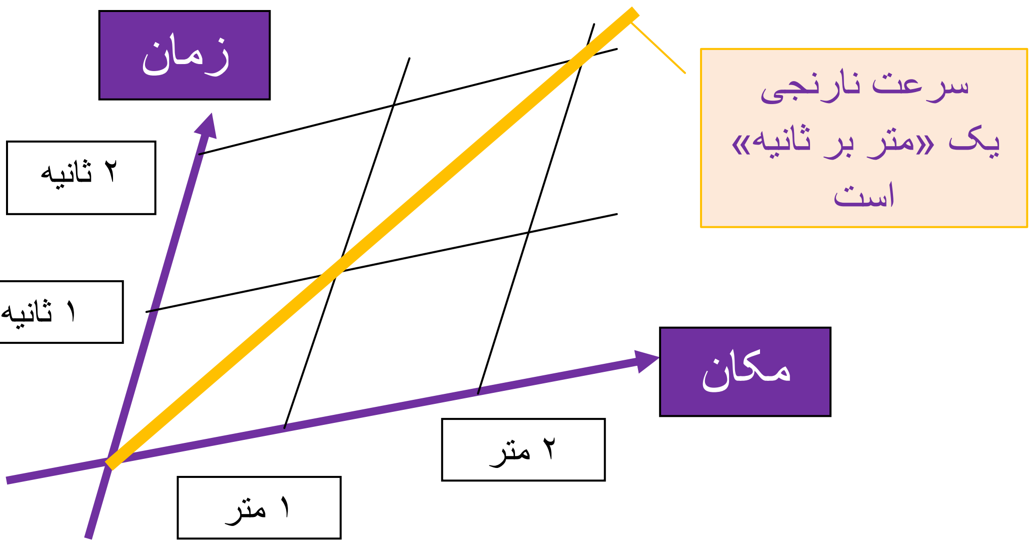
۰. متر، ثانیه و متر بر ثانیه

نارنجی و بنفش در لحظه‌ی صفر از هم جدا می‌شوند. با گذر هر ثانیه، نارنجی یک متر از بنفش دورتر می‌شود. برای نشان دادن این موضوع دو محور می‌کشیم که یکی نشان دهنده‌ی فاصله (مکان) و دیگری نماینده‌ی گذر زمان است.

۱. رسم نمودار با محورهایی که بر هم عمود اند:



۲. همان نمودار ولی با محورهایی که بر هم عمود نیستند.



۱. سرعت نور چه‌قدر است؟

آزمایش‌های گوناگون نشان داده که سرعت انتشار نور در خلا برابر با 299792458 متر بر ثانیه است.

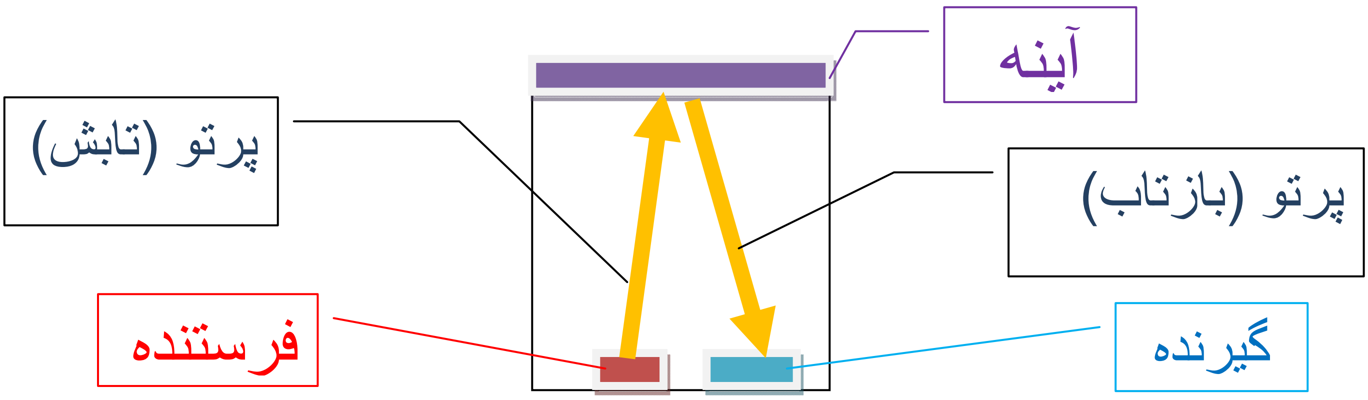
هر کسی، هر کجا و به هر وسیله‌ای که آن را اندازه بگیرد همین مقدار را به دست می‌آورد.

فرض کنید زمان را با ثانیه بسنجیم اما به جای «متر» از واحد «ثانیه‌ی نوری» استفاده کنیم. یک ثانیه‌ی نوری، مسافتی است که نور درخلا در مدت یک ثانیه می‌پیماید.

سرعت نور یک ثانیه‌ی نوری بر ثانیه است. پس در این دستگاه واحدها، سرعت نور برابر با یک است.

تعریف «ثانیه» و روش کار ساعت‌های متعارف پیچیده است. به‌تر است که ساعت ساده‌ای بسازیم تا بتوانیم واحد زمان را آسان‌تر تعیین کنیم:

- جعبه‌ای را در نظر بگیرید.
- زمانی را که در طی آن پرتو نور طول این جعبه را دوبار می‌پیماید، واحد زمان بنامیم.

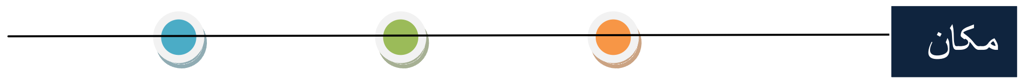


- مسافتی که نور در خلا در این مدت زمان می‌پیماید را واحد طول بنامیم.

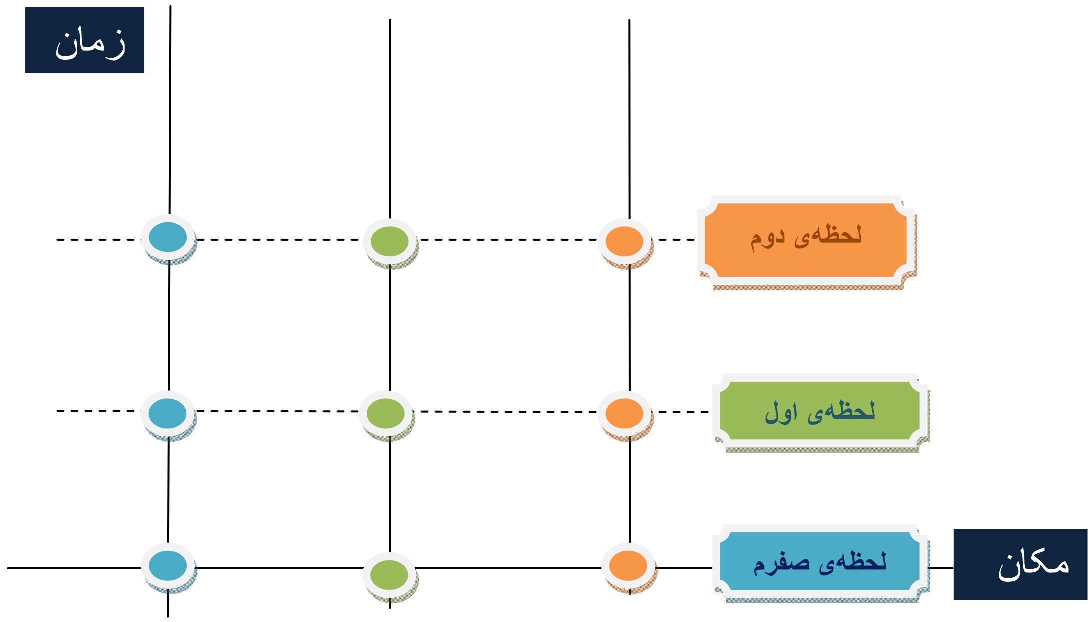
در این دستگاه واحدها، سرعت نور برابر یک است.

۲. نمودارهای مکان زمان

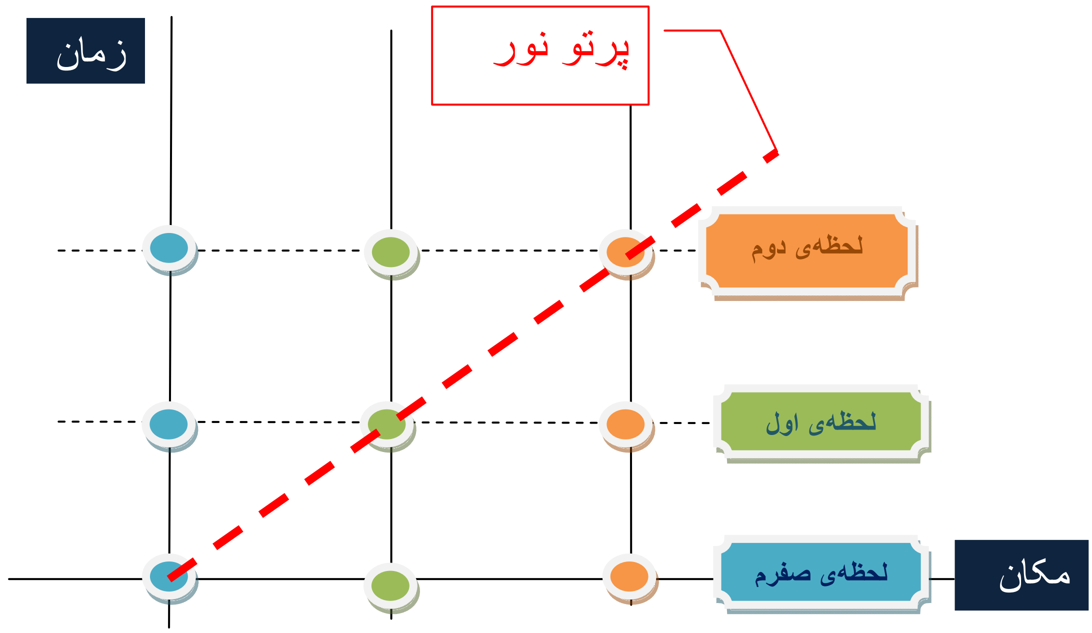
آبی و سبز و نارنجی، به فاصله‌ی «یک واحد طول» از یکدیگر نشسته اند.



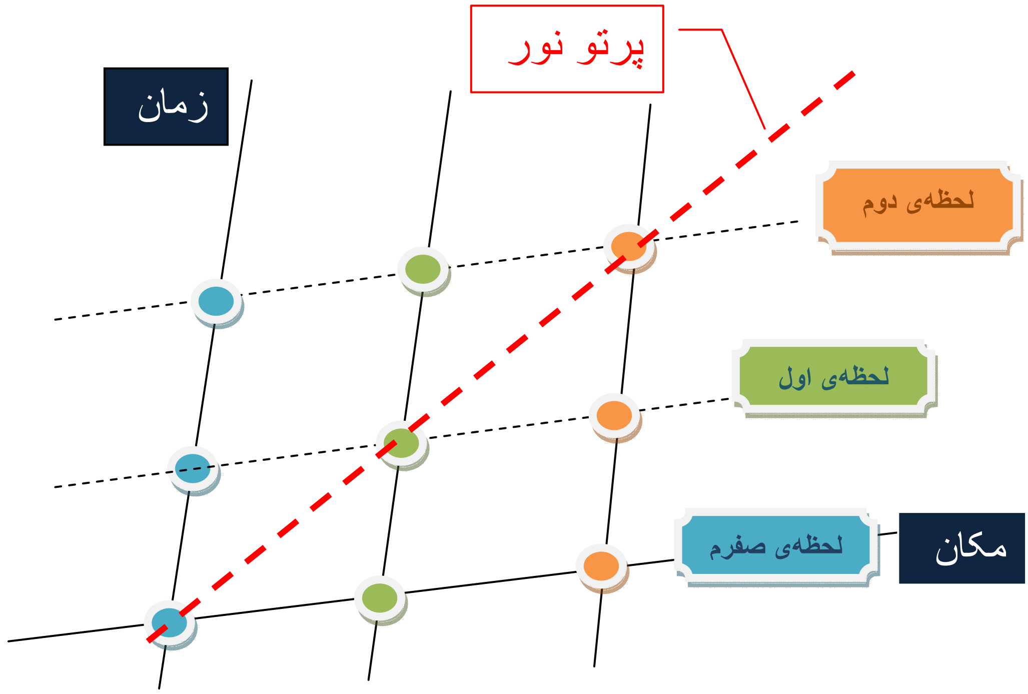
با گذر زمان، فاصله‌ی آن ها نسبت به هم تغییر نمی‌کند. برای نشان دادن این موضوع محوری عمودی می‌کشیم که نشان دهنده‌ی گذر زمان است.



در لحظه‌ی صفر، آبی چراغی را روشن و خاموش می‌کند. پرتو نور سرخ با سرعتِ «یک واحد طول بر یک واحد زمان»، از نقطه‌ی آبی به سوی نقطه‌ی نارنجی می‌رود. این پرتو در لحظه‌ی «یک» به سبز و در لحظه‌ی «دو» به نارنجی می‌رسد.

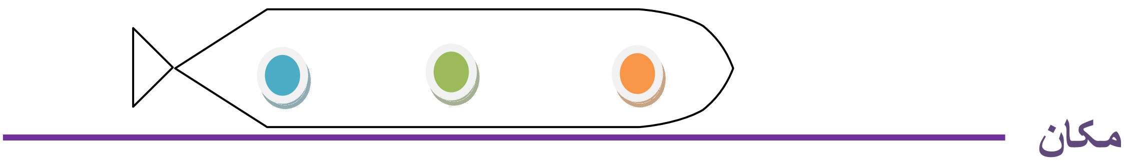


برای رسم این نمودارها ضروری نیست که محور زمان بر محور مکان عمود باشد

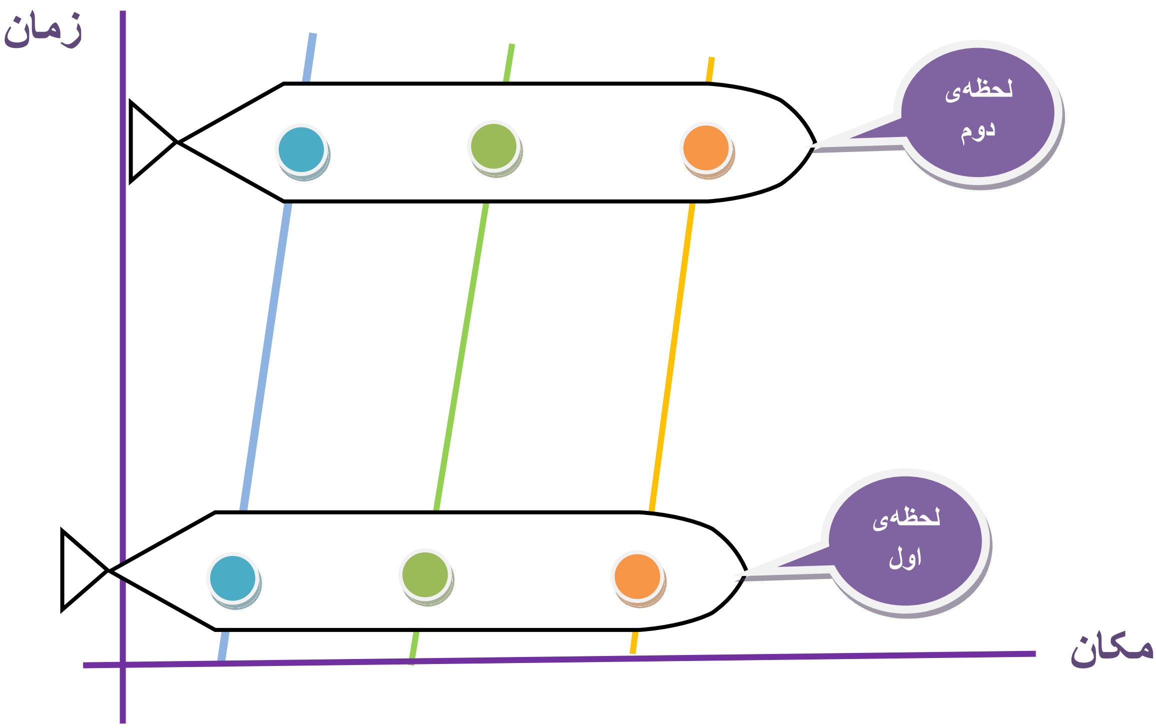


۳. حرکت نسبی

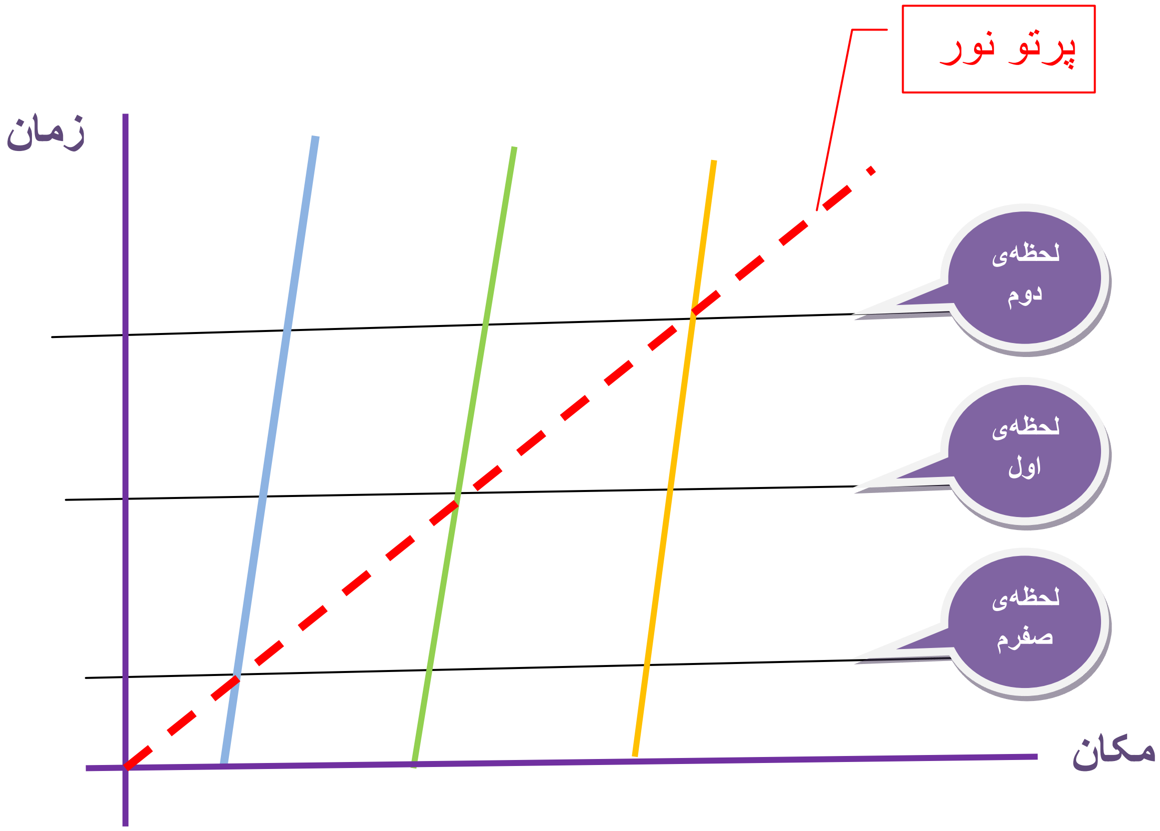
فرض کنید که این سه رفیق سوار فضاپیمایی اند که با سرعت «یک ششم واحد طول بر واحد زمان» (یک ششم سرعت نور) نسبت به سیاره‌ی بنفش حرکت می‌کنند.



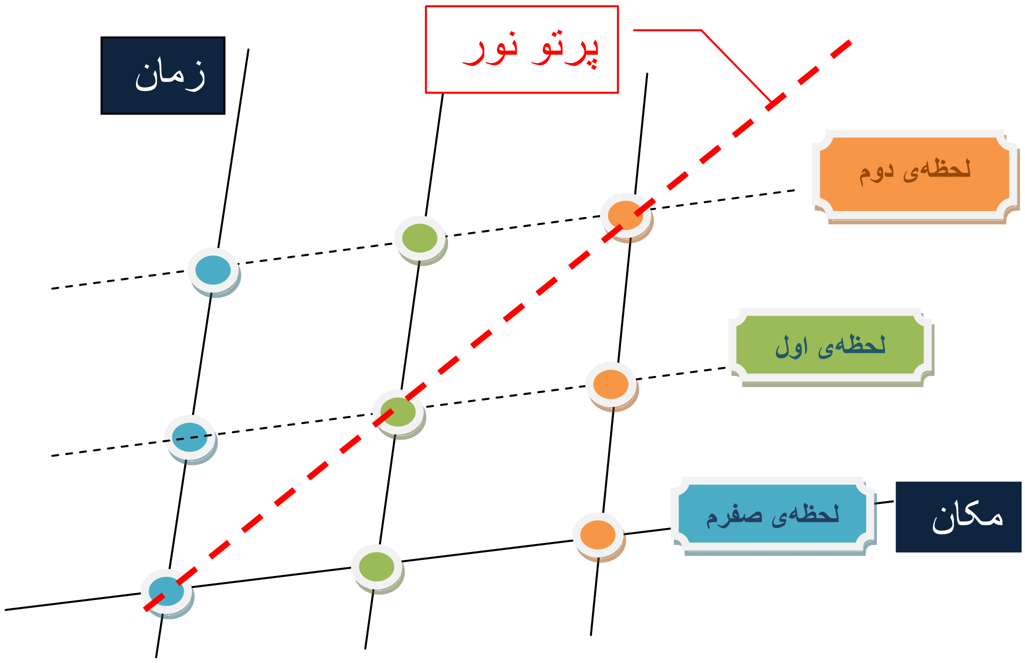
در شکل زیر، وضعیت فضاپیما نسبت به سیاره‌ی بنفش را در دو «لحظه» نشان داده‌ایم.



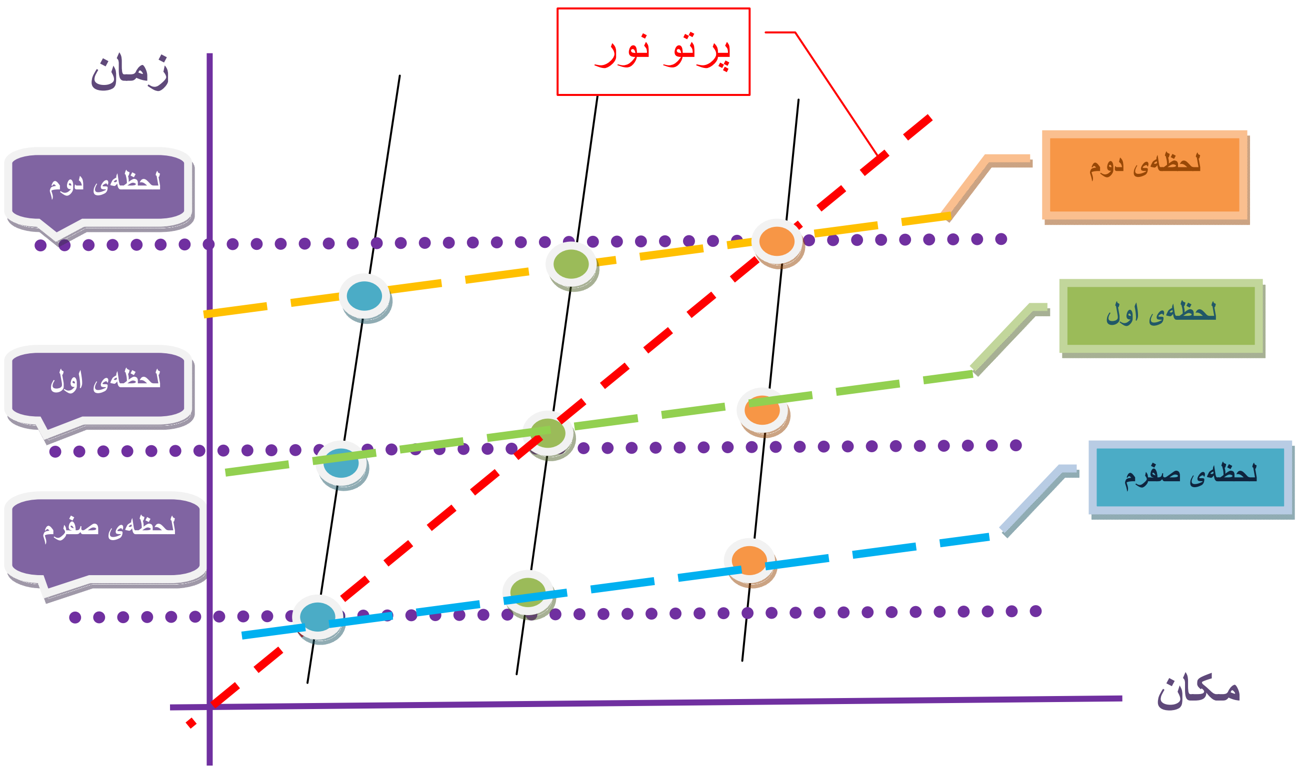
به یاد بیاورید که مسافر آبی چراغی را روشن و خاموش کرده است. سرعت نور از نظر بنفش همان «یک واحد طول بر واحد زمان» است: نور در لحظه‌ی صفرم مکان آبی را ترک می‌کند. در لحظه‌ی اول به مکان سبز و در لحظه‌ی دوم به مکان نارنجی می‌رسد.



و به یاد بیاورید که سرعت نور درون فضاپیما هم «یک واحد طول بر یک واحد زمان» است.



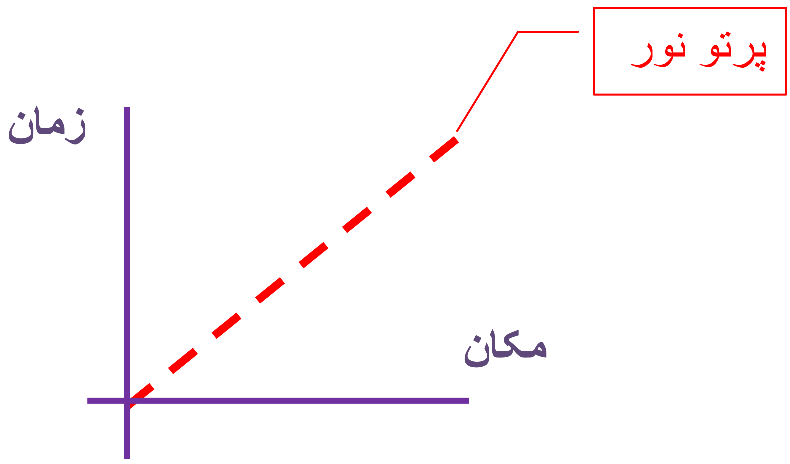
از انطباق این دو شکل بر هم چه نتیجه می‌گیریم؟



مفهوم «لحظه» (همزمانی) نسبی است.

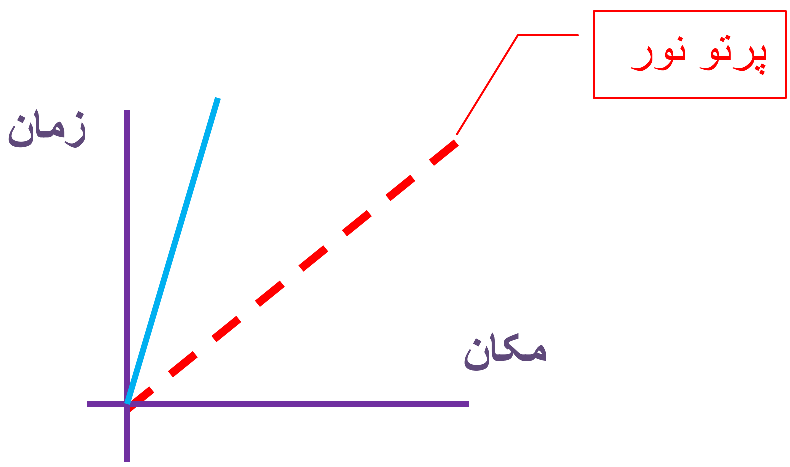
قانون رسم نمودار

۱. برای توصیف جهان (یک بعدی)، دو محور عمود بر هم می‌کشیم و آن‌ها را درجه بندی می‌کنیم به طوری‌که مسیر حرکت پرتو نور با خطی با زاویه‌ی چهل و پنج درجه نمایش بدهیم.

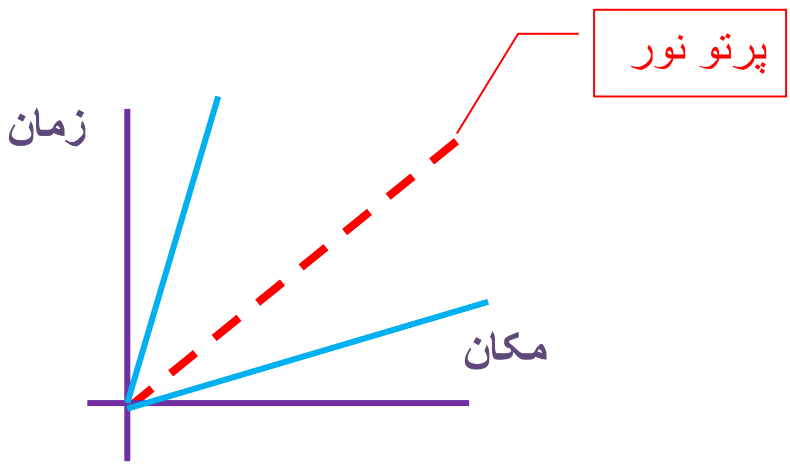


۲. برای توصیف جهان از نظر کسی که نسبت به ما حرکت می‌کند نمودار تازه‌ای می‌کشیم.

آ. محور زمان، مسیر حرکت او را نشان می‌دهد.



ب. محور مکان را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که (مطابق با اصل نسبیت) سرعت نور را برابر با «یک» به دست بیاوریم.

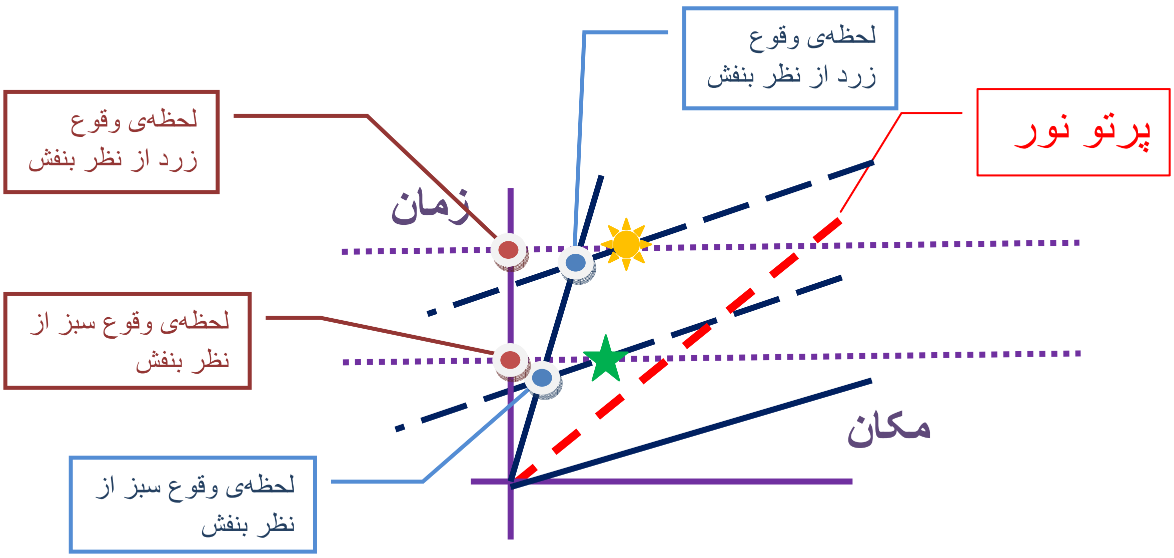


۴. نسبیت همزمانی

دو حکم درباره‌ی زمان

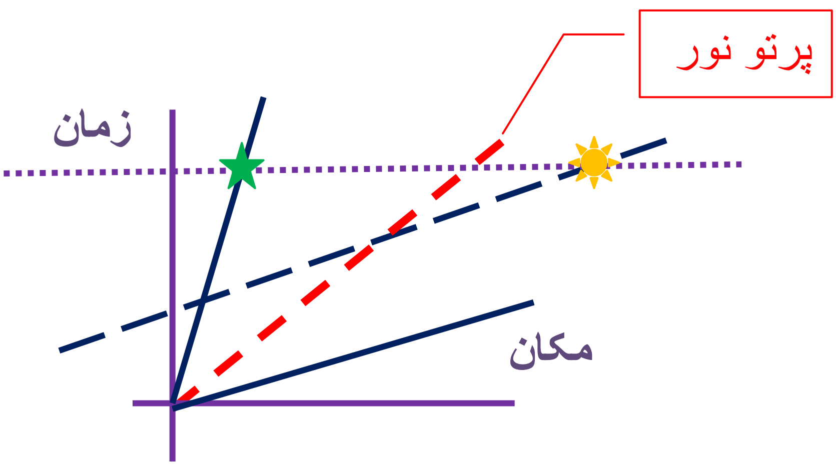
۱. اگر روی داد سبز باعث وقوع روی‌داد زرد بشود، آن‌گاه سبز پیش از زرد اتفاق افتاده است.

مثال: سبز لحظه‌ی روشن شدن فشفشه است. فشفشه با سرعت زیاد حرکت می‌کند و در روی‌داد زرد می‌درخشد.

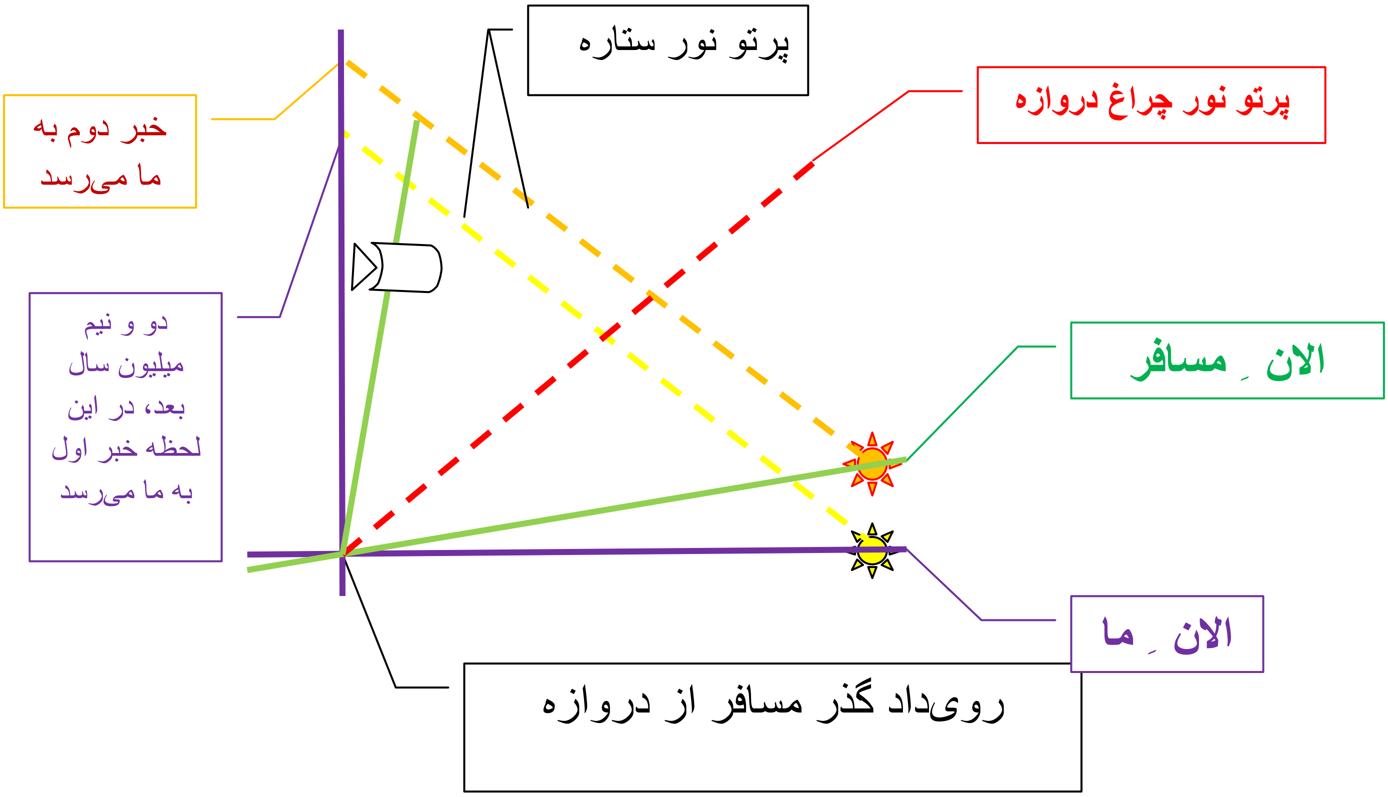


۲. اگر زرد علت سبز نباشد آن‌گاه ترتیب زمانی آن‌ها نسبی است.

مثال: از نظر ما روی‌دادهای سبز و زرد همزمان است. از نظر دوست ما، زرد اول رخ داده است.



فرض کنید که همین الان کسی با سرعت وارد شهر می‌شود. در لحظه‌ای که او از دروازه (ایستگاه پلیس راه) می‌گذرد چراغ دروازه روشن می‌شود. در همان لحظه، در کهکشان همسایه، آندرومدا، که با ما حدود دو و نیم میلیون سال نوری فاصله دارد چه می‌گذرد؟ فرض کنید که آندرومدا نسبت به ما ساکن است و فرض کنید که جهت حرکت مسافر به سوی اندرومدا است.



آن چه که از نظر مسافر، «الان» (یعنی همزمان با لحظه‌ی عبور او از دروازه) رخ داده، از نظر ما، «بعدا» (یعنی مدت‌ها پس از عبور او از دروازه) رخ خواهد داد.

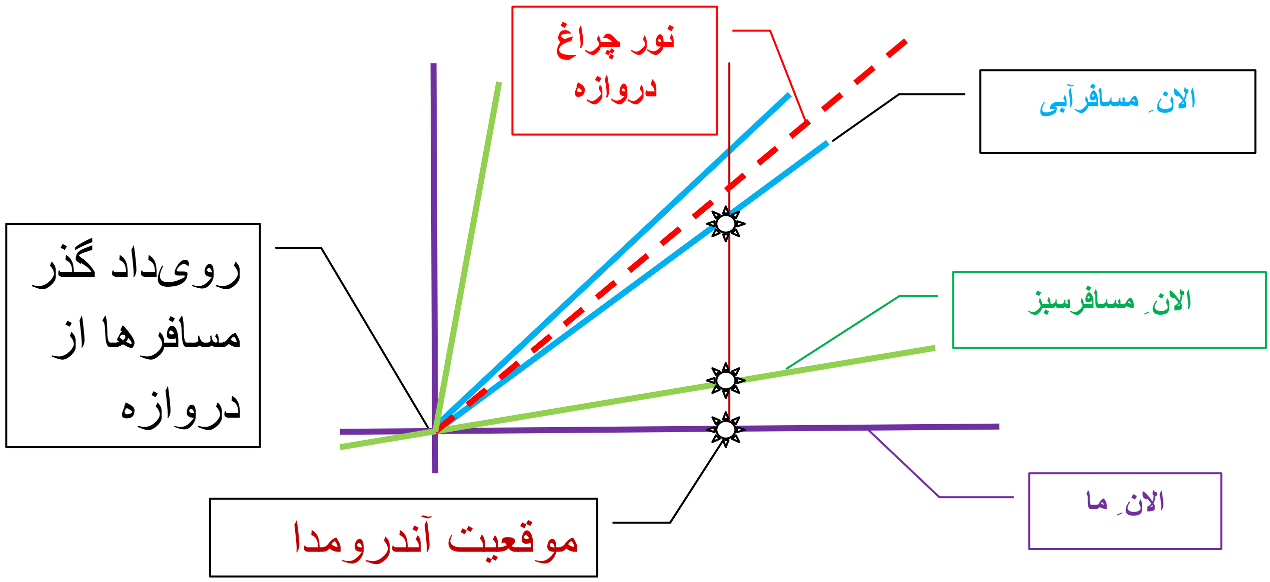
تمرین: فرض کنید که سرعت مسافر ۳۰ متر بر ثانیه (تقریبا ۱۱۰ کیلومتر بر ساعت) است. اختلاف زمانیِ دو رویدادِ زرد و نارنجی در آندرومدا چند سال است؟

پاسخ. فرض کنید که واحد محور عمود (زمان) سال و واحد محور افقی (مکان) سال نوری باشد. چون سرعت نور تقریبا سی‌صدهزار کیلومتر بر ثانیه است، پس شیبِ محورِ همزمانی برای مسافر (محور سبز) برابر است با $\frac{0.03}{300000}$. پس

$$\Delta T = \frac{0.03}{300000} \times (2500000) = \frac{1}{4} \text{ سال}$$

تمرین: دو مسافر (سبز و آبی) با سرعت‌های متفاوت همزمان از دروازه شهر می‌گذرند. در آن لحظه، در آندرومدا چه خبر است؟ فرض کنید که سرعت مسافر آبی بسیار بیش‌تر از سرعت مسافر سبز و تقریبا با سرعت نور برابر است. فرض کنید که آندرومدا نسبت به ما ساکن است و فرض کنید که جهت حرکت مسافرها به سوی اندرومدا است.

پاسخ

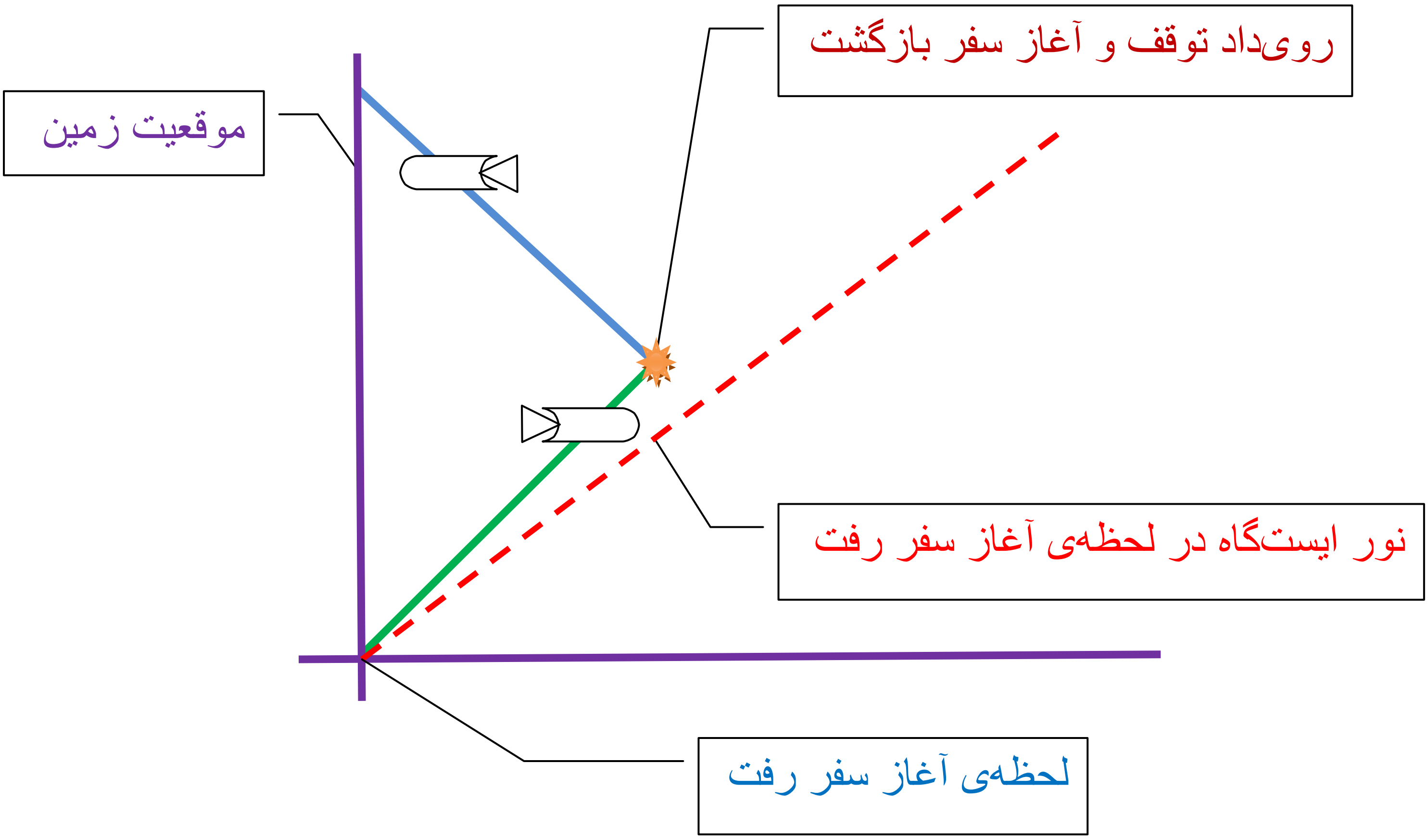


تمرین: پهنای این لحظه در آندرومدا چند سال است؟

پاسخ. آندرومدا با ما حدود دو و نیم میلیون سال نوری فاصله دارد پس پهنای لحظه‌ی الان، ۵ میلیون سال است.

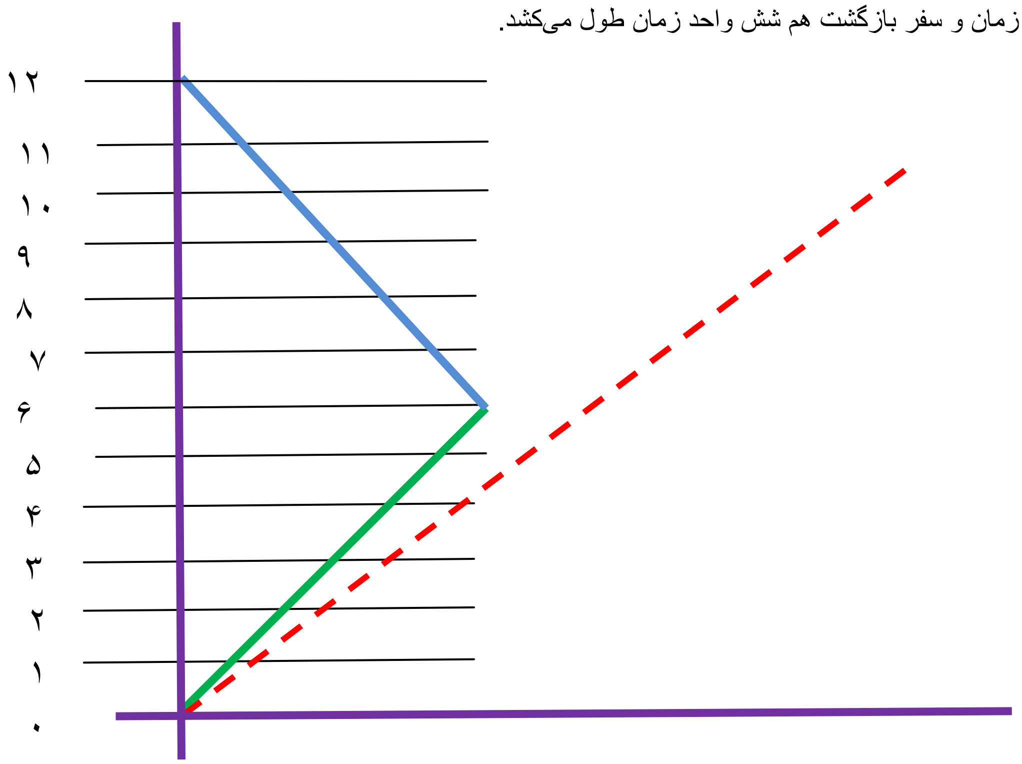
۵. سفر به آینده

دو رفیق قدیمی راهشان را از هم جدا می‌کنند. یکی از آن‌ها (بنفش) زندگی در این روزگار را دوست دارد اما دیگری (مسافر) تصمیم می‌گیرد که به آینده برود شاید بتواند زندگی بهتری بسازد. سبز بر فضاپیمایی سوار می‌شود. درلحظه‌ی آغاز سفر او چراغ ایستگاه روشن می‌شود. سبز مدتی را با سرعت ثابت از زمین دور می‌شود. سپس توقف کرده و با همان سرعت به سمت زمین برمی‌گردد.



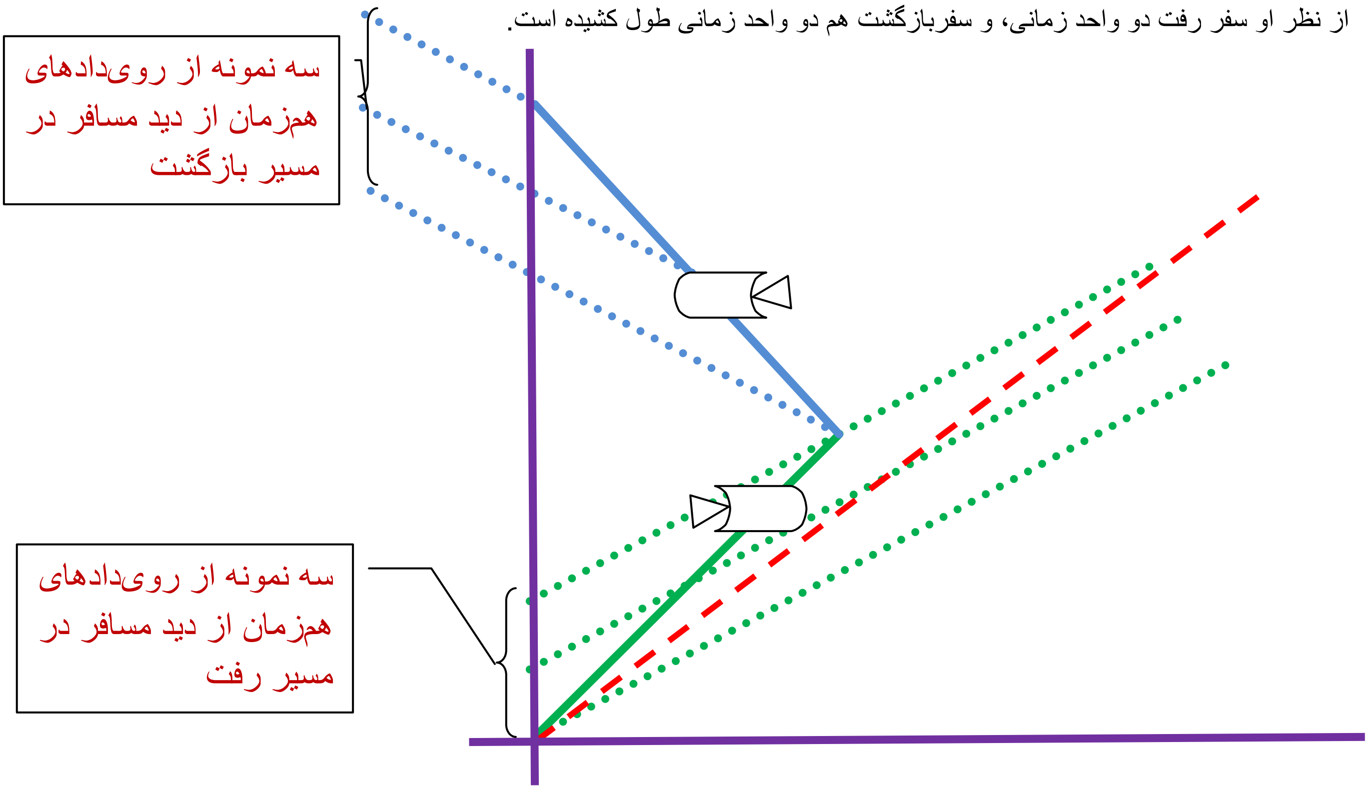
تحلیل سفر از نظر بنفش:

سفر رفت شش واحد زمان و سفر بازگشت هم شش واحد زمان طول می‌کشد.

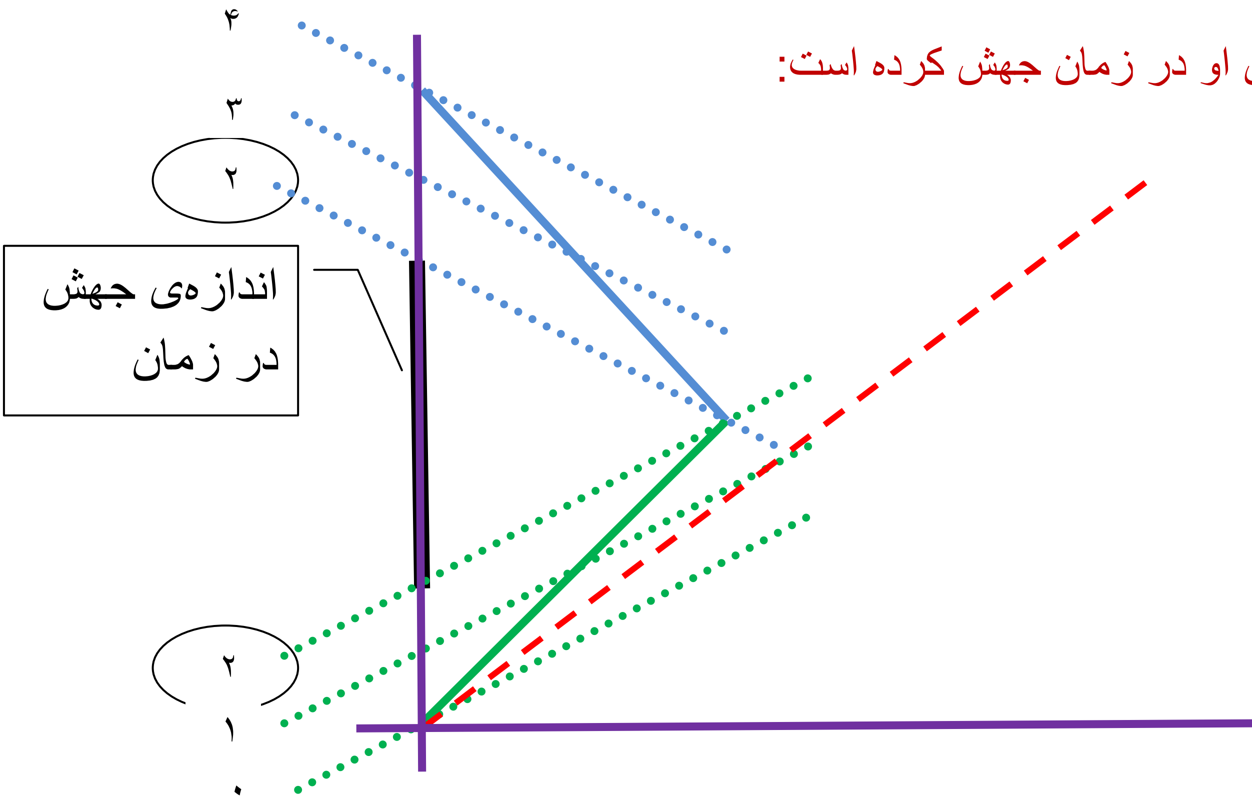


تحلیل سفر از نظر مسافر:

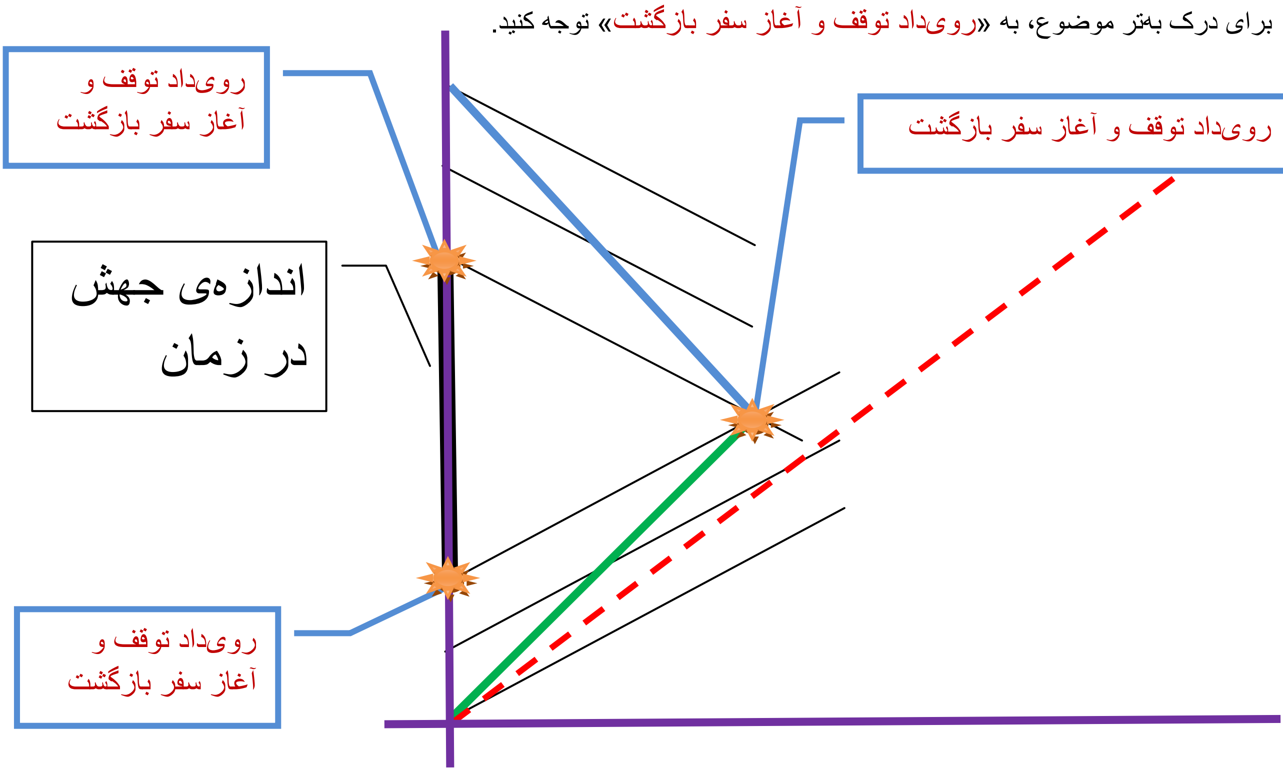
از نظر او سفر رفت دو واحد زمانی، و سفربازگشت هم دو واحد زمانی طول کشیده است.



پس او در زمان جهش کرده است:

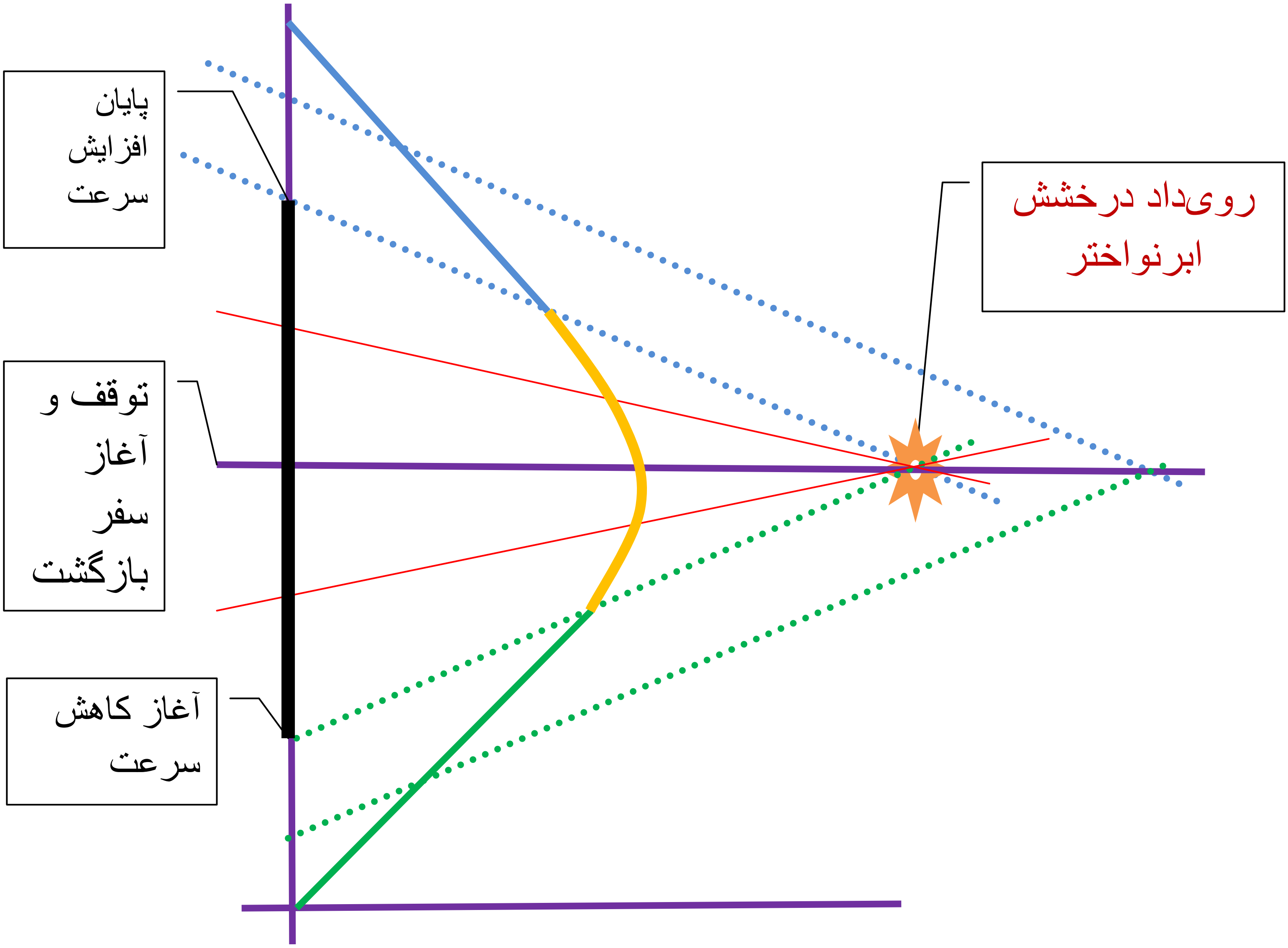


برای درک بهتر موضوع، به «رویداد توقف و آغاز سفر بازگشت» توجه کنید.



از نظر سبز، دو رویداد مختلف روی زمین با «رویداد توقف و آغاز سفر بازگشت» همزمان اند.

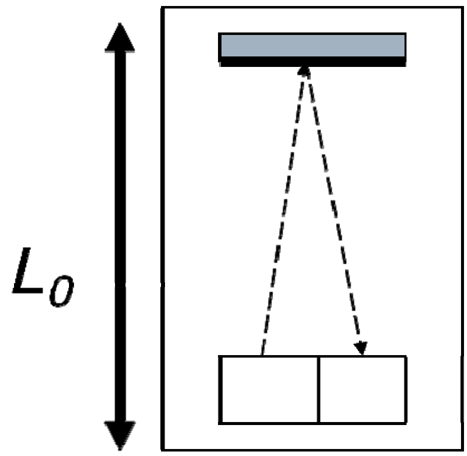
سبز چه‌گونه به آینده جهیده است؟ برای تحلیل این موضوع به رویداد توقف و آغاز سفر بازگشت نگاه کنیم. ما در توصیف نحوه‌ی سفر سبز اغراق کرده‌ایم. چون ممکن نیست که او در یک لحظه ناگهان متوقف شده باشد و در همان لحظه هم، با همان سرعت قبلی سفر بازگشت را آغاز کرده باشد. در عمل، شتاب فضاپیما چندان زیاد نیست. سبز به کندی از سرعت ش کم می‌کند تا متوقف شود و سپس دوباره به کندی سرعت ش را در راه بازگشت افزایش می‌دهد. بر خلاف شکل‌های پیشین، خط‌های همزمانی، همگام با تغییر سرعت فضاپیما، اندک اندک می‌چرخند.

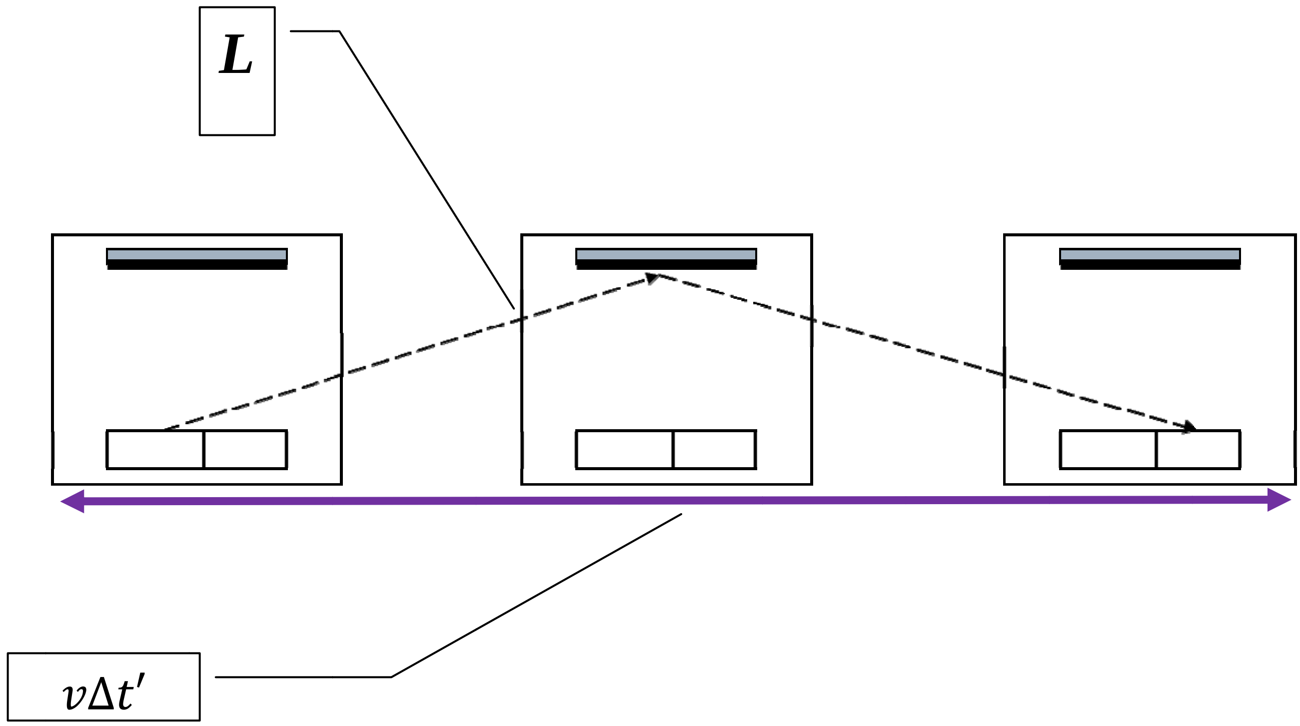


همان‌طور که می‌بینید، مفهوم «الان» از نظر سبز پیچیده است. مثلا لحظه‌های مختلفی از زندگی او با روی‌داد درخشش ابرنواختری در آسمان همزمان است!

۶. نسبت ضرب‌آهنگ ساعت‌ها

$$\Delta t = \frac{2L_0}{c}$$





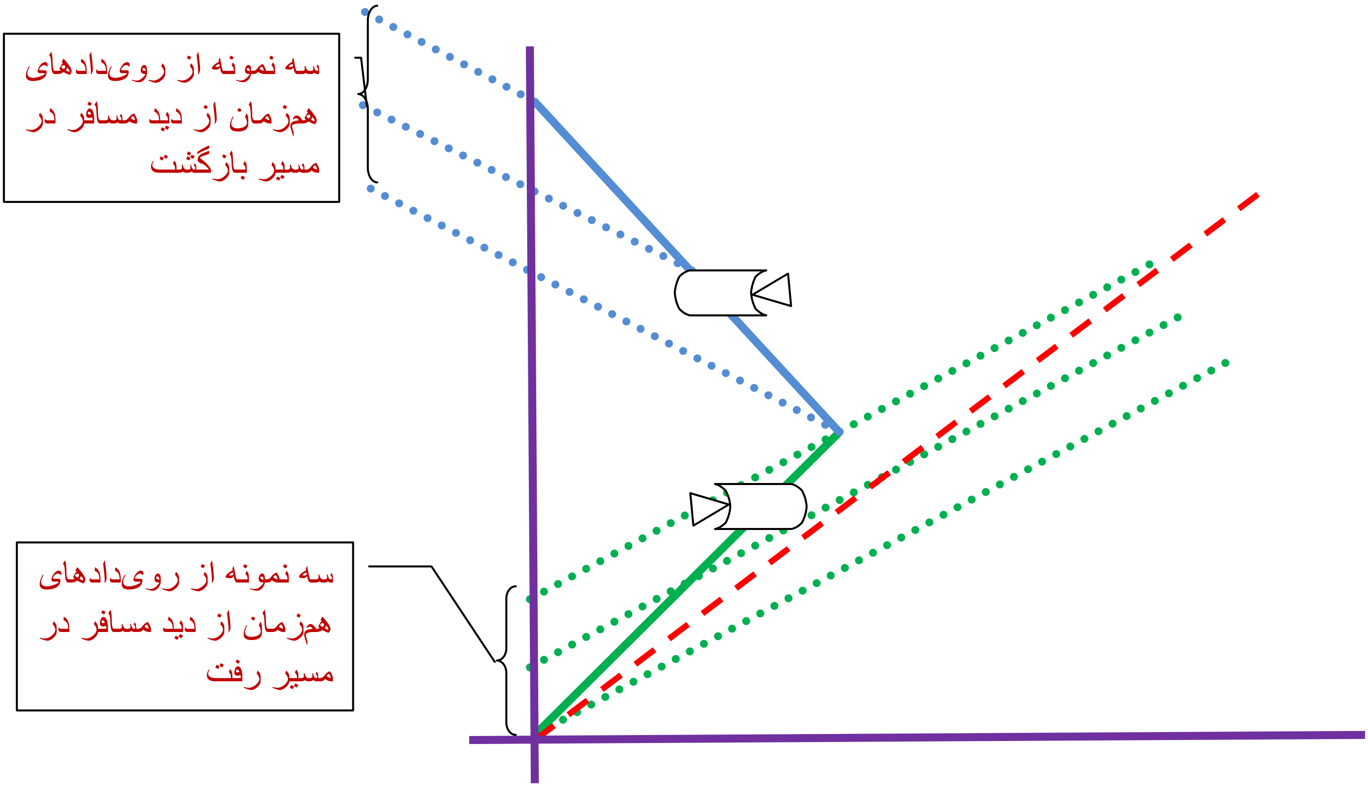
$$\Delta t' = \frac{2L}{c} = \frac{2\sqrt{{L_0}^2 + (v\,\Delta t'/2)^2}}{c}$$

$$(\Delta t)^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\Delta t')^2$$

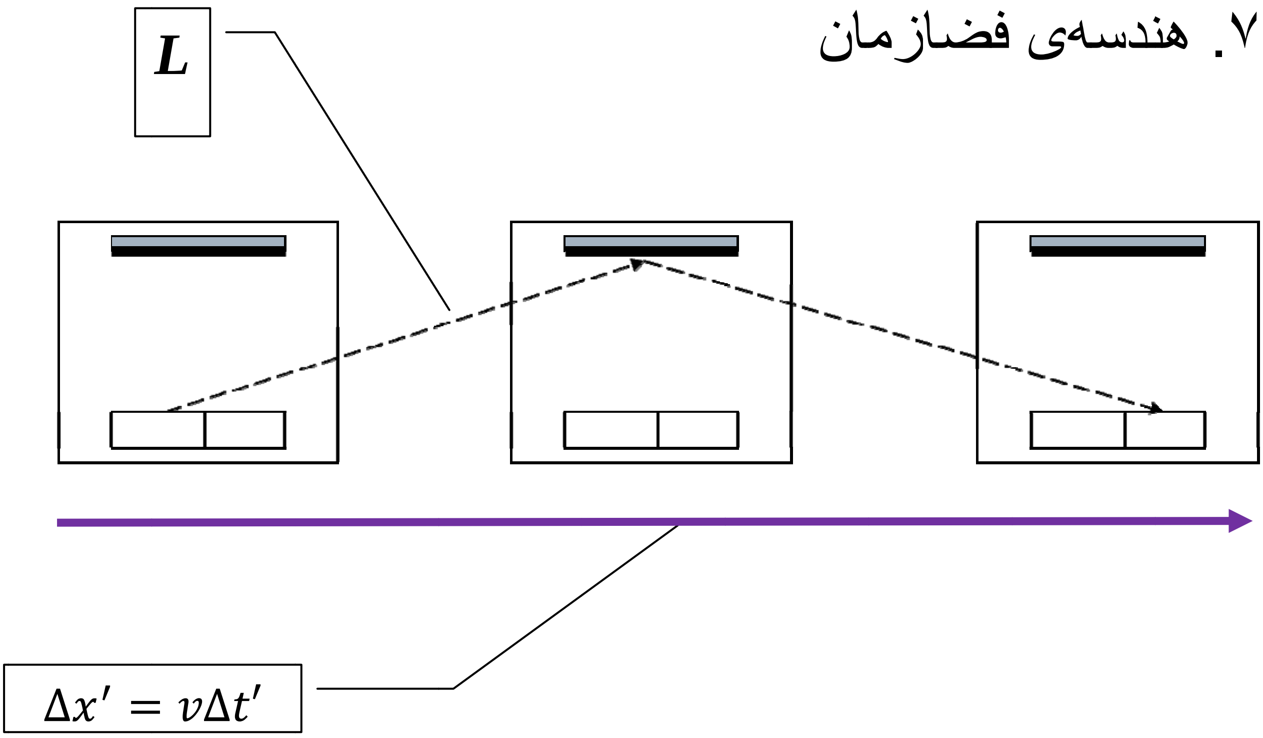
تمرین: فرض کنید که سرعت مسافر در مسیر رفت و برگشت، نه‌دهم سرعت نور $(v = \frac{۹}{۱۰}c)$ است. از نظر او، سفر رفت یک سال و سفر برگشت هم یک سال طول کشیده است. در این مدت، بر روی زمین چند سال گذشته است؟ (شکل را ببینید)

پاسخ.

$$\Delta T = \frac{۲}{\sqrt{1-\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۲}}} \cong ۴.۶ \text{ سال}$$



۷. هندسه‌ی فضازمان



$$(\Delta t)^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\Delta t')^2 = (\Delta t')^2 - \frac{(\Delta x')^2}{c^2}$$
$$\Delta x = 0$$

دو رویداد ۱ و ۲ را در نظر بگیرید که از نظر بنفش همکان اند. منظور از صفت همکان این است که اگر فاصله‌ی آن‌ها از مبدء مختصه‌های بنفش را با x_1 و x_2 نشان دهیم آن‌گاه $\Delta x := x_2 - x_1 = 0$. فرض کنید که فاصله‌ی زمانی این دو روی‌داد از نظر بنفش Δt باشد. فرض کنید که دو ناظر سبز و نارنجی فاصله‌ی مکانی و زمانی رخ دادن این دو روی‌داد را ثبت کنند. بحث قبلی درباره‌ی طرز کار ساعت‌ها نشان می‌دهد که

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta t^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$$

دو رویداد ۱ و ۲ را در نظر بگیرید که از نظر نارنجی همزمان اند. فاصله‌ی آن‌ها از مبدء مختصه‌ها را با x_1 و x_2 نشان دهیم و تعریف می‌کنیم $\Delta x := x_2 - x_1$. فاصله‌ی زمانی این دو روی داد را هم با Δt نشان می‌دهیم. پس

$$\Delta t = 0$$

حالا فرض کنیم که فاصله‌ی این دو روی‌داد از نظر نارنجی L است. یعنی اگر از محل روی‌داد ۱ به اندازه‌ی L واحد روی محور مکان نارنجی به پیش برویم به محل روی‌داد ۲ می‌رسیم. همین مسافت از نظر بنفش چه‌قدر است؟

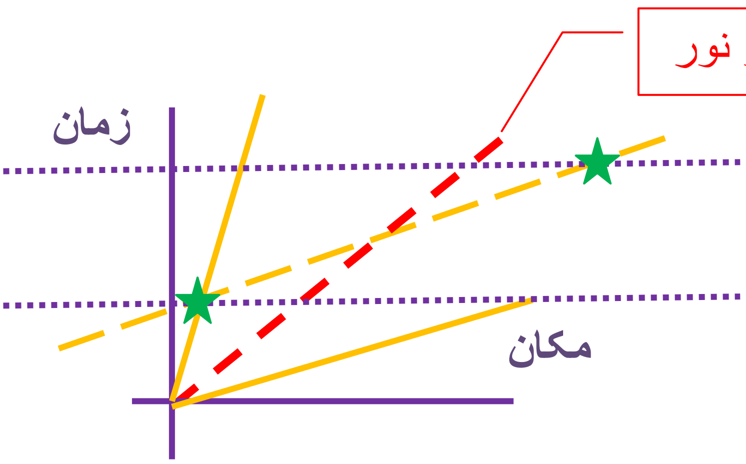
برای یافتن پاسخ این پرسش، بنفش پرتو نوری را از جایی که ۱ رخ داده به سمت جایی که ۲ رخ داده می‌فرستد. او آینه‌ای در آن جا کار می‌گذارد که نور را برگرداند. زمان رفت و برگشت نور را اندازه می‌گیرد و اسم آن را می‌گذارد T. این اندازه‌گیری از نظر بنفش هم‌مکان است زیرا هم فرستنده و هم گیرنده درجایی قرار دارند که رخداد ۱ اتفاق افتاده است. سرعت بنفش از نظر نارنجی v است. پس زمان رفت و برگشت نور از نظر نارنجی برابر است با

$$T = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

از آن جا که سرعت نور برای هر دو c است پس

$$\frac{2L}{c} = T = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{2L}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \implies L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, L$$

برگردیم به دو روی‌داد همزمان ۱ و ۲. از شکل زیر دیده می‌شود که از نظر بنفش $\Delta t = v\Delta x$. (توجه کنید که در این شکل سرعت نور برابر با یک است)



پس

$$\Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = L^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = L^2 = \Delta x^2$$

۸. تبدیل‌های لورنتس

مجذور فاصله‌ی فضازمانی دو روی‌داد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\Delta s^2 \coloneqq c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$$

دیدیم که همه‌ی ناظرها درباره‌ی مقدار Δs^2 هم نظر اند. هرچند که مقدارهای گوناگونی را به فاصله‌ی فضایی دو روی‌داد Δx و فاصله‌ی زمانی آن‌ها نسبت می‌دهند. در این بخش می‌خواهیم. دو ناظر شماره‌ی یک و دو را در نظر بگیرید که فاصله‌ی فضایی و زمانی دو روی‌داد معین را اندازه می‌گیرند و آن‌ها را به صورت $(\Delta t_1, \Delta x_1)$ و $(\Delta t_2, \Delta x_2)$ گزارش می کنند. ما فرض می کنیم که این دو روی داد متوالی اند به این معنا که

$$(\Delta t_i, \Delta x_i) \to (0,0) \quad i = 1,2.$$

دلیل این فرض این است که ممکن است سرعت نسبی ناظرها متغیر باشد. مثلا یکی از آن ها ناظر لخت و دیگری شتاب دار باشد. فرض کنید که

$$\begin{bmatrix} c\Delta t_2 \\ \Delta x_1 \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} c\Delta t_1 \\ \Delta x_1 \end{bmatrix} \quad \Lambda \coloneqq \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix}$$

هدف ما تعیین ماتریس Λ بر حسب سرعت لحظه‌ای ناظر ۲ نسبت به ناظر ۱ است که آن را با v نشان می‌دهیم. ابتدا فرض کنید که $\Delta x_1 = 0$. از مفهوم سرعت روشن است که $\Delta x_2 = v\Delta t_2$. همچنین دیده‌ایم که در این صورت $\Delta t_2 = \gamma \Delta t_1$ که

$$\gamma \coloneqq \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

با جای‌گذاری در رابطه‌ی $\begin{bmatrix} c\Delta t_2 \\ \Delta x_1 \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} c\Delta t_1 \\ \Delta x_1 \end{bmatrix}$ معلوم می‌شود که $\lambda_{11} = \gamma$ و $\lambda_{21} = \frac{\gamma v}{c}$.

سپس فرض کنید که $\Delta x_2 = 0$. پس $\Delta x_1 = -v\Delta t_1$ و $\Delta t_1 = \gamma \Delta t_2$. با جای‌گذاری در رابطه‌ی $\begin{bmatrix} c\Delta t_2 \\ \Delta x_1 \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} c\Delta t_1 \\ \Delta x_1 \end{bmatrix}$ معلوم می‌شود که $\lambda_{22} = \gamma$ و $\lambda_{12} = \frac{\gamma v}{c}$. پس

$$\Lambda \coloneqq \begin{bmatrix} \gamma & \frac{\gamma v}{c} \\ \frac{\gamma v}{c} & \gamma \end{bmatrix}$$

می‌توانیم این نتیجه را به شکلی بنویسیم که به دوران در صفحه‌ی اقلیدسی دوبعدی شبیه باشد. برای این کار کمیت تندی نسبی را با رابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم.

$$\varphi \coloneqq \operatorname{arctanh}\frac{v}{c}$$

تمرین: نشان دهید که

$$\Lambda \coloneqq \begin{bmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix}$$

تمرین: فرض کنید که تندی ناظر i نسبت به ناظر j برابر با φ_{ji} باشد. قانون جمع تندی‌های نسبی را اثبات کنید. یعنی نشان دهید که $\varphi_{31} = \varphi_{21} + \varphi_{32}$.

اثبات. برای هر دو روی‌داد دلخواه، سه ناظر ۱و ۲ و ۳ فاصله‌های فضایی و زمانی را گزارش می‌کنند. می‌دانیم که

$$\begin{bmatrix} c\Delta t_3 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\varphi_{31} & \sinh\varphi_{31} \\ \sinh\varphi_{31} & \cosh\varphi_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\Delta t_1 \\ \Delta x_1 \end{bmatrix}$$

و همچنین

$$\begin{bmatrix} c\Delta t_3 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\varphi_{32} & \sinh\varphi_{32} \\ \sinh\varphi_{32} & \cosh\varphi_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\Delta t_2 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cosh\varphi_{32} & \sinh\varphi_{32} \\ \sinh\varphi_{32} & \cosh\varphi_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh\varphi_{21} & \sinh\varphi_{21} \\ \sinh\varphi_{21} & \cosh\varphi_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\Delta t_1 \\ \Delta x_1 \end{bmatrix}$$

پس

$$\begin{bmatrix} \cosh\varphi_{31} & \sinh\varphi_{31} \\ \sinh\varphi_{31} & \cosh\varphi_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\varphi_{32} & \sinh\varphi_{32} \\ \sinh\varphi_{32} & \cosh\varphi_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh\varphi_{21} & \sinh\varphi_{21} \\ \sinh\varphi_{21} & \cosh\varphi_{21} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cosh(\varphi_{32} + \varphi_{21}) & \sinh(\varphi_{32} + \varphi_{21}) \\ \sinh(\varphi_{32} + \varphi_{21}) & \cosh(\varphi_{32} + \varphi_{21}) \end{bmatrix}$$

تمرین: نشان دهید که φ هر مقدار حقیقی را می‌پذیرد.

تمرین. نشان دهید که مجموعه‌ی تبدیل‌های لورنتس که اعضای آن با ماتریس‌های Λ داده می‌شود، همراه با عمل ضرب ماتریسی، گروه است.

تمرین: قانون جمع سرعت‌ها نسبی را به دست بیاورید.

پاسخ: . سرعت ناظر i نسبت به ناظر j برابر با v_{ji} نشان می‌دهیم. از قانون جمع تندی‌های نسبی می‌دانیم که

$$\operatorname{arctanh}\frac{v_{31}}{c} = \operatorname{arctanh}\frac{v_{21}}{c} + \operatorname{arctanh}\frac{v_{32}}{c}$$

با توجه به قاعده‌ی

$$\tanh(\alpha+\beta) = \frac{\tanh\alpha + \tanh\beta}{1+\tanh\alpha\tanh\beta}$$

می‌بینیم که

$$v_{31} = \frac{v_{21}+v_{32}}{1+\frac{v_{21}v_{32}}{c^2}}$$

۹. تقارن فضازمان

ماتریس Λ نظیر تبدیل‌های لورنتس ویژه، اتحاد زیر را برآورده می‌کند

$$\eta = \Lambda^{\mathrm{T}}\eta\Lambda \quad \eta := \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

η را متریک مینکوفسکی می‌نامند. ماتریس Λ^{T}، ترانهاده‌ی ماتریس Λ است:

$$\Lambda^{\mathrm{T}} := \begin{bmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{21}\\ \lambda_{12} & \lambda_{22}\end{bmatrix}$$

البته در فضازمان ۱+۱ بعدی و برای تبدیل‌های لورنتس ویژه $\Lambda^T = \Lambda$. اتحاد $\eta = \Lambda^{\mathrm{T}}\eta\Lambda$ در ناوردایی Δs^2 ریشه دارد:

$$\Delta s^2 = \begin{cases} \begin{bmatrix}c\Delta t_2 & \Delta x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\Delta t_2\\ \Delta x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c\Delta t_1 & \Delta x_1\end{bmatrix}\Lambda^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\Lambda\begin{bmatrix}c\Delta t_1\\ \Delta x_1\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}c\Delta t_1 & \Delta x_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\Delta t_1\\ \Delta x_1\end{bmatrix} \end{cases}$$

پس به جز تبدیل‌های لورنتسی که نماینده‌ی تبدیل خیز (سرعت نسبی دو ناظر) هستند، سه دسته تبدیل لورنتس دیگر هم وجود دارد:

وارونی فضا (پاریته) $\Lambda_P = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$، وارونی زمان $\Lambda_T = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ و وارونی فضازمان $\Lambda_{PT} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

۱۰. ویژه شتاب.

ویژه‌شتاب ذره‌ای در لحظه‌ی t (از نظر ما) برابر با α است. معنای این گزاره چه است؟ فرض کنید که سرعت ذره در آن لحظه نسبت به ما u است. ناظر لختی را در نظر بگیرید که سرعت او هم نسبت به ما $v=u$ باشد. پس سرعت ذره نسبت به او که با $v' := u - v$ در آن لحظه‌ی خاص

صفر است. آهنگ تغییرات سرعت ذره با زمان را، که در آن لحظه‌ی خاص اندازه‌گیری شده، ویژه‌شتاب می‌نامند.

$$\alpha := \left.\frac{dv'}{d\tau}\right|_{v'=0} = \frac{d}{d\tau}\left[\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}\right]_{u=v} = \frac{\dot{u}}{1-\frac{u^2}{c^2}} = \gamma(u)^2\dot{u}$$

τ زمان‌ویژه است که ناظر همراه لحظه‌ای (ساعت ذره) اندازه‌گیری می‌کند. $\dot{u}$ هم نشان‌دهنده‌ی مشتق u نسبت به τ است.

تمرین: نشان دهید که $\alpha = c\dot{\varphi}$.

حرکت با ویژه‌شتاب ثابت:

فرض کنید که ذره‌ای از حالت سکون با ویژه‌شتاب ثابت $\alpha = g$ از حالت سکون حرکت کند. چون تندی ذره با $\varphi = \frac{g}{c}\tau$ داده می‌شود پس $u(\tau) = c\tanh\left(\frac{g}{c}\tau\right)$. از آن جا که

$$u = \frac{dx}{dt} = \gamma^{-1}\dot{x} = \frac{1}{\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right)}\,\dot{x}$$

معلوم می‌شود که $\dot{x} = c\sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)$. پس $x(\tau) = \frac{c^2}{g}\left[\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) - 1\right]$.

تمرین: با توجه به رابطه‌ی $\dot{t} = \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right)$، t را به صورتی تابعی از τ بنویسید و نشان دهید که

$$\left(x(\tau) + \frac{c^2}{g}\right)^2 - c^2 t(\tau)^2 = \frac{c^4}{g^2}.$$

تمرین: جهان‌خط ذره را رسم کنید.

تمرین: پرتوهای نوری را در نظر بگیرید که از روی‌داد $(t, x) = (0, x_0)$ می‌گذرند. نشان دهید که اگر

$$x_0 \le \sigma_h := -\frac{c^2}{g},$$

این پرتوها هرگز به ذره نمی‌رسند.

تمرین: نشان دهید که در زمان‌های کوتاه $t < t_0$ پس از آغاز حرکت، $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$. معیار t_0 را چه‌گونه تعیین می‌کنیم؟

ناظر شتاب‌دار.

دستگاه مختصه‌های که ذره‌ی شتابدار p به کار می‌برد با یک راستای زمان‌گونه

$$e_0 = \frac{1}{c}\left(c\dot{t}_p, \dot{x}_p\right) = \left(\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right), \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)\right)$$

و یک راستای فضاگونه

$$e_1 = \frac{1}{c}\left(\dot{x}_p, c\dot{t}_p\right) = \left(\sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right), \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right)\right)$$

ساخته می‌شود.

$$e_0 \cdot e_0 = 1, \quad e_1 \cdot e_0 = 0, \quad e_1 \cdot e_1 = -1.$$

ضرب داخلی با متریک مینکوفسکی داده می‌شود. توجه کنیم که این تعریف از «چارچوب»، همان است که ناظرهای لخت، چه برای توصیف خود و چه سایر ناظرهای لخت به کار می‌برند. فرض کنیم که روی‌دادی از نظر ما در (t, x) رخ بدهد. فرض کنیم که ناظر شتاب‌دار p به این روی‌داد مختصه‌های (τ, σ) را نسبت بدهد که σ با رابطه‌ی زیر تعریف شده است

$$X \coloneqq (ct, x) = \left(ct_p, x_p\right) + \sigma e_1.$$

پس

$$dX \coloneqq (cdt, dx) = ce_0 d\tau + e_1 d\sigma + \sigma de_1 = c\left(1 + \frac{g\sigma}{c^2}\right)e_0 d\tau + e_1 d\sigma,$$

چرا که $de_1 = \frac{g}{c}e_0 d\tau$. در نتیجه المان طول مینکوفسکی $ds^2 \coloneqq dX \cdot dX$ در مختصه‌های (τ, σ) با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$ds^2 \coloneqq \left(1 + \frac{g\sigma}{c^2}\right)^2 c^2 d\tau^2 - d\sigma^2.$$

مجموعه‌ی رویدادهای $\sigma = \sigma_h \coloneqq -\frac{c^2}{g}$ را افق ریندلر می‌نامند.

تمرین: با فرض $g = 9.8m/s^2$ مقدار σ_h را در واحد سال‌نوری حساب کنید.