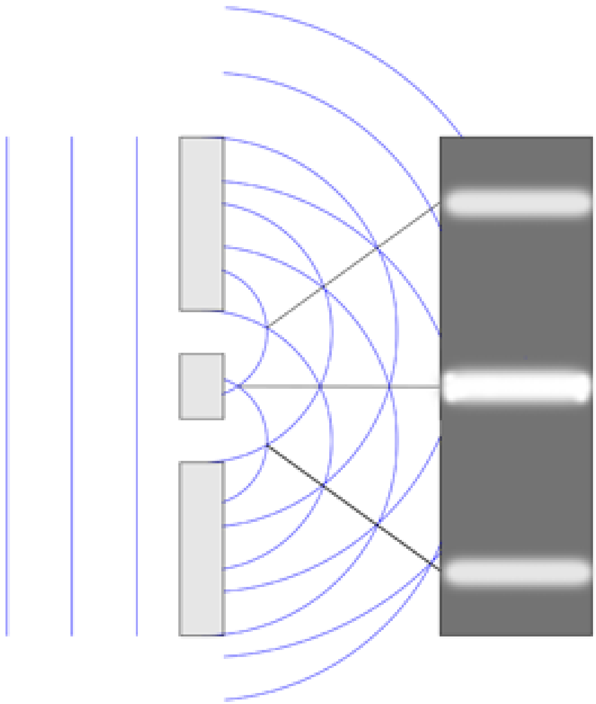
مکانیک کوانتمی و نظریه‌ی اعداد

فرهنگ لران

رویداد دانشجویی دهه‌ی ریاضیات
خانه‌ی ریاضیات اصفهان
۱۴۰۳/۸/۱۰

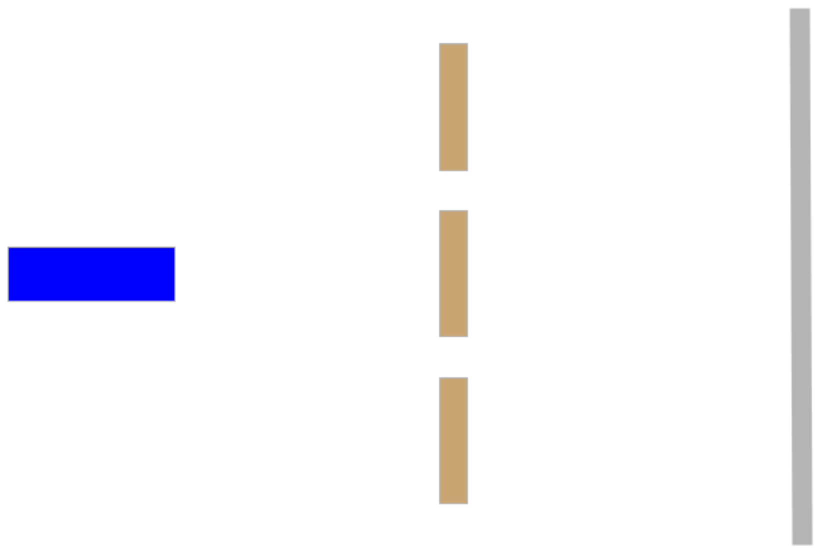
این نوشته، متن مطلبی است که در روی‌داد دانش‌جویی دهه‌ی ریاضیات ارائه داده‌ام. این برنامه، دهم آبان ۱۴۰۳ در خانه‌ی ریاضیات اصفهان برگزار شد. بعضی از شکل‌هایی را که در این فایل استفاده کرده‌ام از اینترنت برداشته‌ام.



شکل ۱. تداخل امواج در آزمایش دو شکافی. برای سادگی، موج بازتاب نمایش داده نشده است.

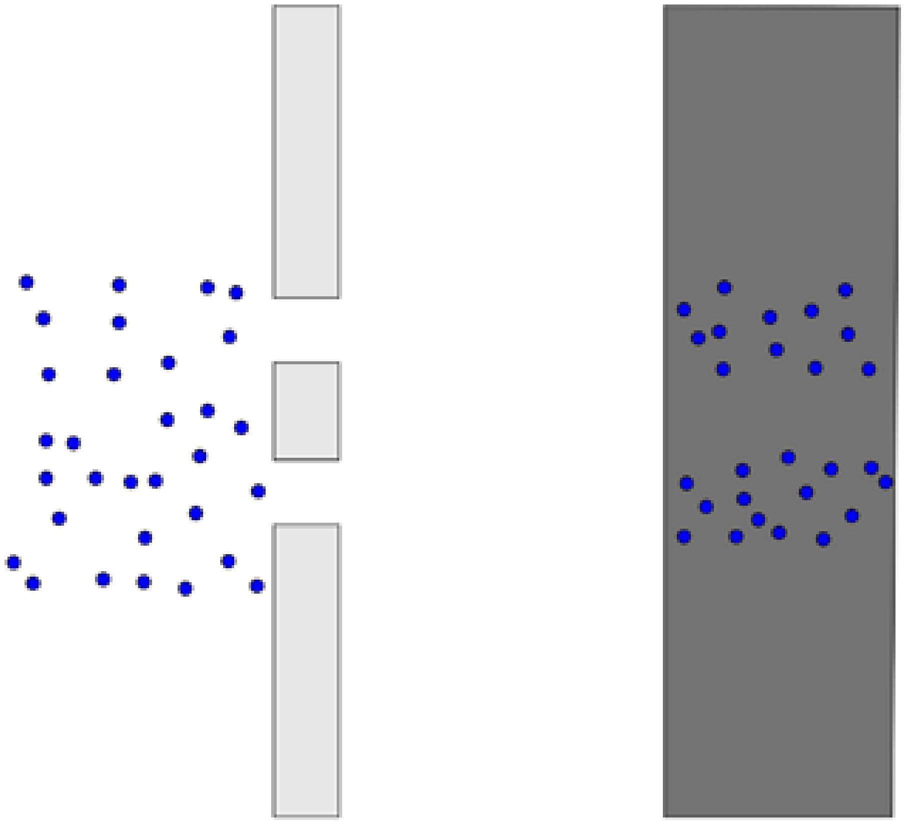
از سمت چپ موج تختی می‌تابد. بخشی از موج که به مانع برخورد می‌کند باز می‌تابد یا در آن جذب می‌شود. بخشی هم از دو شکافی که در مانع تعبیه شده است عبور می‌کند. اگر عرض دو شکاف از مرتبه‌ی «طول موج» موج تابیده شده باشد، هر شکاف همچون چشمه‌ای از موج نمایان می‌شود. این دو موج در سمت راست مانع با هم برهم‌نهی می‌کنند.[1] این برهم‌نهی درجاهایی سازنده و در جاهایی مخرب است. در نتیجه بر روی پرده طرح تداخل موج‌ها پدیدار می‌شود.

[1] فرض می‌کنیم معادله‌ی موج، خطی است.



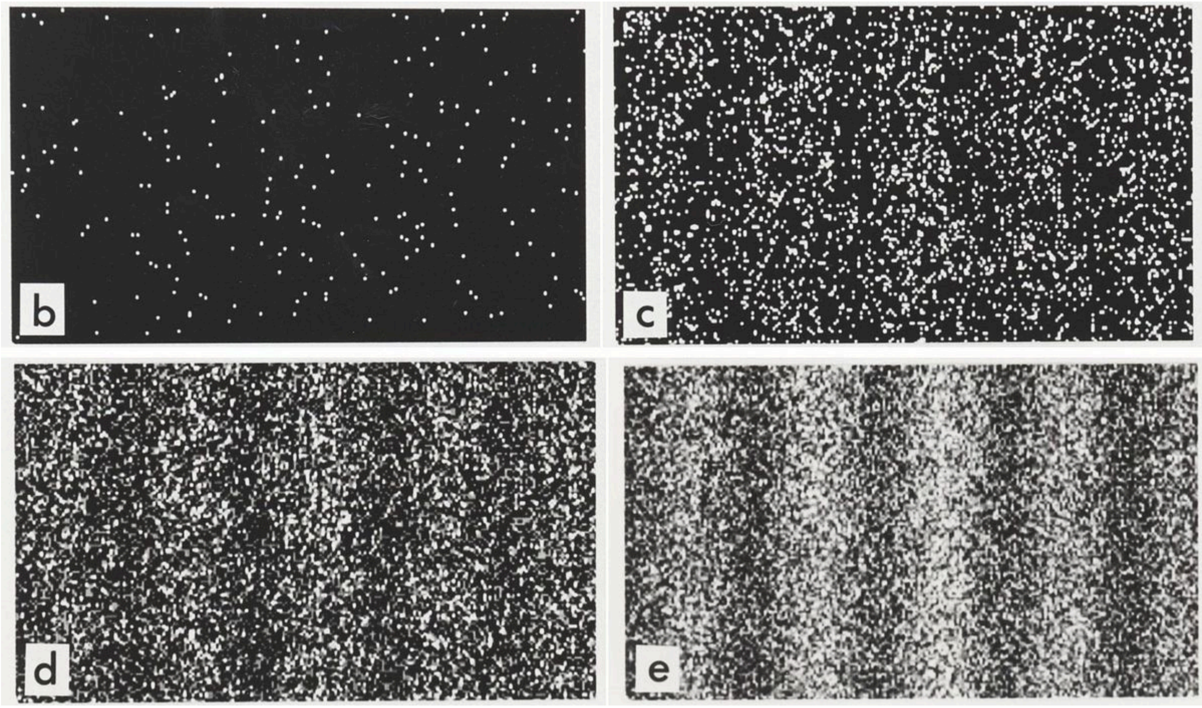
شکل ۲. از درون جعبه‌ی آبی‌رنگ الکترون‌هایی به سوی مانع پرتاب می‌شود. اگر الکترون‌ها از مانع عبور کنند، روی پرده‌ی خاکستری در سمت راست ثبت می‌شوند.

از سمت چپ الکترون‌هایی به سوی مانع پرتاب می‌کنیم. چون الکترون ذره‌ای باردار است، با تنظیم جریان الکتریکی در جعبه‌ی آبی رنگ، می‌توانیم کاری کنیم که هربار فقط یک الکترون در محیط باشد.



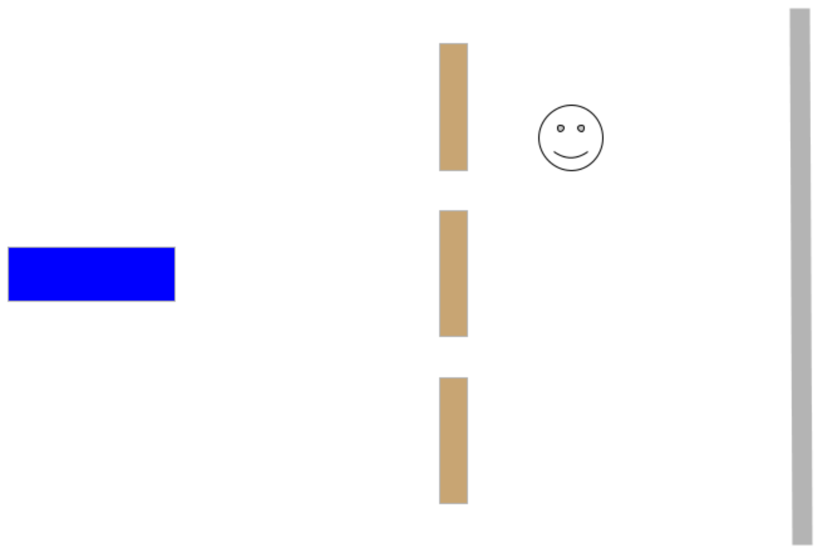
شکل ۳. چون الکترون ذره است انتظار داریم که الکترون‌های پرتاب شده به سه دسته تقسیم شوند. آن‌هایی که به مانع برخورد می‌کنند و اصلا به پرده نمی‌رسند. آن‌هایی که از شکاف بالایی عبور می‌کنند و آن‌هایی که از شکاف پایینی عبور می‌کنند.

الکترون ذره‌ای بنیادی و تجزیه‌ناپذیر است. ما تاکنون ذره‌ی باردار آزادی که اندازه‌ی بار الکتریکی آن کسری از اندازه‌ی (قدرمطلق) بار الکتریکی الکترون باشد مشاهده نکرده‌ایم. پس انتظار داریم الکترون‌هایی که از هر شکاف می‌گذرند به حرکت‌شان به خط راست ادامه دهند و روی پرده، روبه‌روی همان شکاف ثبت شوند.



شکل ۴. آزمایش دوشکافی.

در شکل بالا می‌بینیم که هر الکترون روی پرده فقط در یک نقطه ثبت می‌شود. اما با گذشت زمان طرح تداخل شکل می‌گیرد که مشخصه‌ی موج‌ها است. از این آزمایش نتیجه می‌گیریم که محل اصابت الکترون با پرده معین نیست. هر الکترونی که به سوی مانع دوشکافی پرتاب می‌شود، شاید جایی روی پرده ثبت شود. احتمال پدیدار شدن الکترون در هر نقطه‌ای روی پرده با تابع موجی داده می‌شود. آن‌چه که می‌بینیم طرح تداخل آن موج است. این فیلم را ببینید.

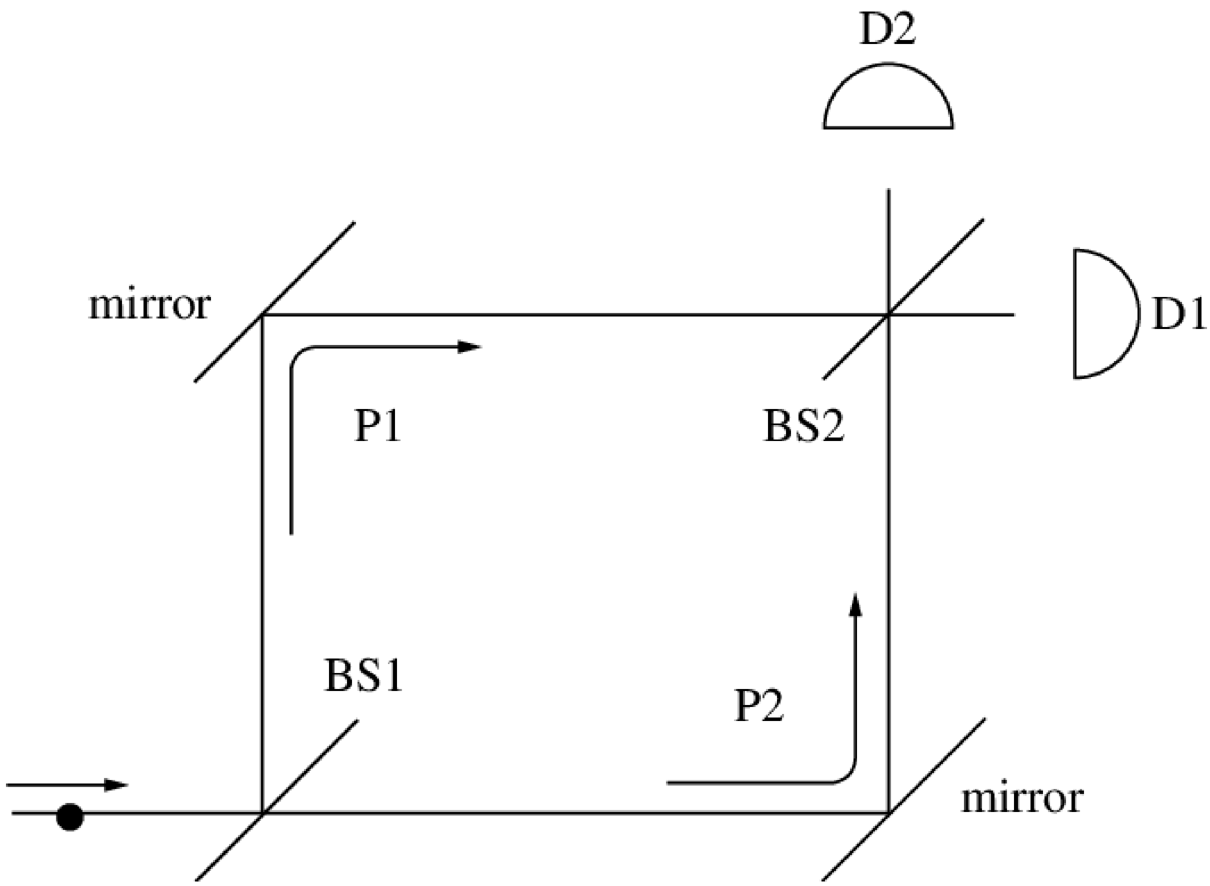


شکل ۵. آزمایش دوشکافی. آشکارسازی پشت پرده می‌گذاریم.

دیدیم که الکترون به هر حال ذره است. ذره‌ای که از جعبه‌ی آبی رها می‌شود و سپس روی پرده آشکار می‌شود. الکترون در آن میان چه رفتاری دارد؟ آیا هم‌زمان از هر دو شکاف رد شده است و با خودش تداخل کرده است؟ در آن صورت باید به طریقی تجزیه شده باشد. برای فهمیدن رفتار الکترون، آشکارسازی پشت مانع قرار می‌دهیم. این آشکارساز الکترون را به دام نمی‌اندازد. کار ش فقط آن است که ببیند آیا الکترون از شکاف بالایی عبور کرده است یا نه. اگر آشکارساز را روشن کنیم، طرحی هم‌چون شکل ۳ پدیدار می‌شود. اگر آن را خاموش کنیم دوباره طرح تداخل ظاهر می‌شود. پس اگر بخواهیم رفتار الکترون را رصد کنیم، هم‌چون ذره‌ای رفتار می‌کند. اما اگر آن را رصد نکنیم، یعنی ندانیم که در فاصله‌ی بین

جدا شدن ش از جعبه‌ی آبی تا ثبت ش بر روی پرده، کجا است و اصلا هست یا نه، موجی پدیدار می‌شود که با خودش تداخل می‌کند و تعیین می‌کند که الکترون با چه احتمالی بر کجای پرده ظاهر شود!

اگر آزمایشی ترتیب دهیم که در آن کمی از الکترون باخبر شویم، طرحی بینابین، نه چندان مثل شکل ۳ و نه چندان مثل شکل ۴ ظاهر می‌شود. این مقاله را ببینید.



شکل ۶. آزمایش گزینش پسینی ویلر.

فوتونی (بسته‌موج) از سمت چپ به شکافنده‌ی ۱ (Beam Splitter) می‌تابد. اگر شکافنده‌ی ۲ (BS2) تعبیه نشده باشد، بسته-موج با احتمال برابر وارد مسیر ۱ یا ۲ می‌شود و یکی از دو آشکارساز D1 یا D2 روشن می‌شود. اگر شکافنده‌ی ۲ تعبیه شده باشد و کسی بسته‌موج را رصد نکند، آن‌گاه آن‌چه که در آشکارسازها می‌بینیم طرح تداخل است. مثلا D1 همواره در ناحیه‌ی تاریک قرار دارد و D2 در ناحیه‌ی روشن.

این آزمایش نشان می‌دهد که اگر شکافنده‌ی ۲ از چیدمان آزمایش حذف شود، بسته‌موج پس از عبور از شکافنده‌ی ۱، مسیری را برمی‌گزیند و فقط از یک راه عبور می‌کند. اما اگر شکافنده‌ی ۲

بخشی از چیدمان آزمایش باشد، آن‌گاه پس از عبور هر بسته‌موج از شکافنده‌ی ۱، D2 روشن می‌شود ولی D1 خاموش می‌ماند.

آزمایش گزینش پسینی به این معنا است که آزمایش را بدون شکافنده‌ی ۲ آغاز کنیم و مدت زمانی بعد از آن که انتظار داریم بسته‌موج از شکافنده‌ی ۱ گذر کرده باشد، تصمیم بگیریم که شکافنده‌ی ۲ را سر جای ش بگذاریم یا نه. آزمایش نشان می‌دهد که اگر تا رسیدن بسته‌موج به آشکارسازها، از تعبیه‌ی شکافنده‌ی ۲ خودداری کنیم، این یا آن آشکارساز روشن می‌شود یعنی بسته‌موج این یا آن مسیر را برگزیده است. اما اگر ناگهان تصمیم دیگری بگیریم و شکافنده‌ی ۲ را سرجای ش بگذاریم، طرح تداخلی ظاهر می‌شود. انگار که بسته‌موج، در پاسخ به تصمیم ناگهانی ما گذشته‌ی خودش، یعنی رفتار ش در لحظه‌ی گذر از شکافنده‌ی ۱ را اصلاح می‌کند.

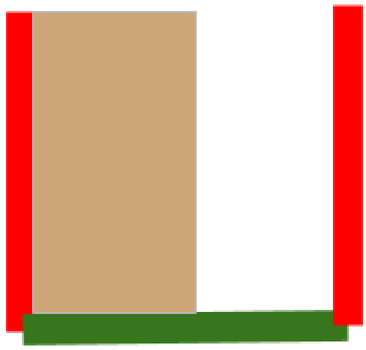
گفتیم که اگر الکترون را رصد نکنیم، رفتار آن را موجی توصیف می‌کند. این موج را دامنه‌ی احتمال می‌نامیم و با نماد ψ (psi) نشان می‌دهیم. یعنی احتمال حضور الکترون در هر ناحیه از فضا با مربع اندازه‌ی ψ داده می‌شود. در مکانیک کوانتمی فرض می‌کنیم که ψ عضوی از فضای هیلبرت است و هر مشاهده‌پذیرها هم نظیر انتخابی از پایه‌های فضای هیلبرت است. مثلا فرض کنید که ذره‌ای را در جعبه‌ای یک-بعدی در بازه‌ی $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ گیر انداخته‌ایم. فضای هیلبرت نظیر این مسئله، فضای تابع‌هایی است که انتگرال اندازه‌ی مربع آن‌ها در این بازه مقدار متناهی باشد. پایه‌های این فضا را با دو دسته تابع زیر، نظیر عددهای طبیعی $n \in N$ نشان می‌دهیم.

$$s_n(x) := \sqrt{2}\sin(2\pi n x), \qquad c_n(x) := \sqrt{2}\cos[(2n - 1)\pi x].$$

نظیر هر تابع موج ψ، ضریب‌هایی چون a_n و b_n هستند که تابع موج را در این پایه‌ها توصیف می‌کنند:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}\left(a_n s_n(x) + b_n c_n(x)\right).$$

اگر ذره‌ای که حالت آن با ψ داده شده را رصد کنیم با احتمال $|a_n|^2$ در وضعیت $s_n(x)$ و با احتمال $|b_n|^2$ در وضعیت $c_n(x)$ پدیدار می‌شود. پس $\sum_{n=1}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = 1$.



شکل ۷. ذره‌ای در آغاز با احتمال یکسان در جایی در نیمه‌ی سمت چپ جعبه قرار دارد.

فرض کنید در آغاز تابع موج ذره به صورت زیر باشد:

$$\psi(x) = \sqrt{2}\theta(-x), \qquad x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$$

که θ نماد تابع پله‌ی هوی‌ساید است. پس از گذشت زمان شکل ψ عوض می‌شود. در این مسئله

$$a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n\pi}, \quad b_n = -\frac{2(-1)^n}{(2n-1)\pi}.$$

پس باید مجموع مربع اندازه‌ی a_n و b_n برابر با ۱ باشد:

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}\frac{1}{(2n-1)^2} = 1.$$

از مسئله‌ی بازل[2] می‌دانیم که این تساوی برقرار است زیرا این تساوی هم‌ارز تساوی زیر است که اویلر در ۱۷۳۵ ثابت کرده است.

$$\sum_{n=1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

[2] Basel problem