اختلال در مدار ماه‌واره

فرهنگ لران

فرض کنیم که نیروی گرانش بین زمین و ماه‌واره با قانون گرانش نیوتن

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{K\vec{r}}{r^3}, \qquad K \coloneqq -GMm,$$

داده شود که m جرم ماهواره، M جرم زمین، G ثابت جهانی گرانش و $\vec{r}$ بردار مکان ماه‌واره نسبت به زمین است و $r \coloneqq \|\vec{r}\|$. از آن‌جا که گشتاور نیروی گرانش بین زمین و ماه‌واره صفر است ($\vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$) پس حرکت ماهواره به گرد زمین در صفحه‌ای است که بر بردار تکانه‌ی مداری $\vec{L} \coloneqq m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ عمود است. برای توصیف حرکت پرتابه در این صفحه، مختصه‌های قطبی r و θ را به کار می‌بریم:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}, \qquad \ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} + r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2r\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}.$$

$\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ بردارهای یکه اند.

معادله‌ی حرکت نشان می‌دهد که مسیر حرکت ماه‌واره، بیضی به کانون زمین است که با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$r(\theta) = -\frac{L^2}{mK}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}}\cos(\theta - \theta_0)\right)^{-1},$$

که $L \coloneqq \|\vec{L}\| = mr^2\dot{\theta}$ اندازه‌ی تکانه‌ی مداری، $E < 0$ انرژی مکانیکی و θ_0 زاویه‌ای است که مقدار آن فقط به انتخاب مبدء سنجش زاویه‌ی θ بسته‌گی دارد.

برای به دست آوردن این نتیجه تابع $u \coloneqq r^{-1}$ را تعریف می‌کنیم و آن را تابعی از θ می‌گیریم. پس

$$u' = \frac{\dot{u}}{\dot{\theta}} = -\frac{\dot{r}}{r^2\dot{\theta}}.$$

در نتیجه $\dot{r} = -\frac{L}{m}u'$ و $\ddot{r} = -\frac{L}{m}u''\dot{\theta} = -\left(\frac{L}{m}\right)^2 u''u^2$. هم‌چنین $r\dot{\theta}^2 = \left(\frac{L}{m}\right)^2 u^3$. با جای‌گذاری در معادله‌ی حرکت شعاعی $\ddot{r} + r\dot{\theta}^2 = \frac{K}{m}u^2$ در می‌یابیم که

$$u'' + u = -\frac{mK}{L^2}.$$

برای محاسبه‌ی انرژی مکانیکی توجه می‌کنیم که $\vec{v}(\theta) = -\frac{L}{m}(u'\hat{r} - u\hat{\theta})$ و در نتیجه انرژی جنبشی T و انرژی پتانسیل V با رابطه‌های زیر داده می‌شوند.

$$T = \frac{L^2}{2m}\left(u'^2 + u^2\right), \qquad V = Ku.$$

برای آسان‌تر شدن محاسبه، معادله‌ی مدار را به صورت زیر می‌نویسیم

$$u(\theta) = A + B\cos(\theta - \theta_0).$$

که $A \coloneqq -\frac{mK}{L^2} > 0$ و $B \coloneqq \frac{mK}{L^2}\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}} < 0$. مئلفه‌ی شعاعی سرعت $v_r(\theta) \coloneqq \hat{r} \cdot \vec{v}(\theta)$ با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$v_r(\theta) = \frac{L}{m} B\sin(\theta - \theta_0).$$

اختلال:

فرض کنیم ضربه‌ی $\vec{p}$ (در صفحه‌ی مدار) در زمانی که ماه‌واره در زاویه‌ی θ_1 و در مکان $\vec{r}_1 \coloneqq \vec{r}(\theta_1)$ قرار دارد به آن وارد شود.[1] در اثر این ضربه، انرژی جنبشی و در پی آن انرژی مکانیکی ذره تغییر می‌کند.

$$\delta E = \delta T = \frac{\|m\vec{v}_1 + \vec{p}\|^2}{2m} - \frac{m\|\vec{v}_1\|^2}{2},$$

که $\vec{v}_1$ سرعت ماه‌واره در θ_1 پیش از ضربه است. هم‌چنین تکانه‌ی مداری به اندازه‌ی $\delta\vec{L} \coloneqq \vec{r}(\theta_1) \times \vec{p}$ تغییر می‌کند. اگر انرژی مکانیکی و اندازه‌ی تکانه‌ی مداری ماه‌واره را پس از ضربه با $\tilde{E}$ و $\tilde{L}$ نشان دهیم، مدار ماه‌واره پس از ضربه، با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$u(\theta) = \tilde{A} + \tilde{B}\cos(\theta - \tilde{\theta}_0), \quad \tilde{A} \coloneqq -\frac{mK}{\tilde{L}^2}, \qquad \tilde{B} \coloneqq \frac{mK}{\tilde{L}^2}\sqrt{1 + \frac{2\tilde{E}\tilde{L}^2}{mK^2}}.$$

به ویژه، مئلفه‌ی شعاعی سرعت ماه‌واره پس از ضربه (که آن را با $\tilde{v}_r(\theta)$ نشان می‌دهیم) با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$\tilde{v}_r(\theta) = \frac{L}{m}\tilde{B}\sin\left(\theta - \tilde{\theta}_0\right).$$

[1] زمان اعمال ضربه آن‌چنان کوتاه است که از تغییر بردار مکان ماه‌واره در مدتی که ضربه وارد می‌شود چشم‌پوشی می‌کنیم. هم‌چنین فرض می‌کنیم که پس از ضربه، مدار بیضی بماند.

- تمرین: نشان دهید که

$$\tilde{B}\sin\left(\theta_1-\tilde{\theta}_0\right)=B\sin(\theta_1-\theta_0)+\frac{p_r}{L},\qquad p_r\coloneqq\hat{r}\cdot\vec{p}.$$

اختلاف زاویه‌ی $\tilde{\theta}_0-\theta_0$ نشان‌دهنده‌ی آن است که در اثر ضربه، بیضی نظیر مدار ماه‌واره چه‌قدر چرخیده است. برای محاسبه‌ی آن توجه می‌کنیم که نقطه‌ی (r_1,θ_1) روی هر دو مدار قرار دارد. پس

$$\cos(\theta_1-\theta_0)=\frac{1}{B}\left(\frac{1}{r_1}-A\right),\qquad \cos\left(\theta_1-\tilde{\theta}_0\right)=\frac{1}{\tilde{B}}\left(\frac{1}{r_1}-\tilde{A}\right),$$

$$\sin(\theta_1-\theta_0)=\frac{mv_r(\theta_1)}{BL},\qquad \sin\left(\theta_1-\tilde{\theta}_0\right)=\frac{m\tilde{v}_r(\theta_1)}{\tilde{B}\tilde{L}}.$$

با استفاده از این رابطه‌ها در اتحادهای $\tilde{\theta}_0-\theta_0=(\theta_1-\theta_0)-\left(\theta_1-\tilde{\theta}_0\right)$ و

$$\cos\left(\tilde{\theta}_0-\theta_0\right)=\cos\left(\theta_1-\tilde{\theta}_0\right)\cos(\theta_1-\theta_0)+\sin\left(\theta_1-\tilde{\theta}_0\right)\sin(\theta_1-\theta_0),$$

$$\sin\left(\tilde{\theta}_0-\theta_0\right)=\cos\left(\theta_1-\tilde{\theta}_0\right)\sin(\theta_1-\theta_0)-\sin\left(\theta_1-\tilde{\theta}_0\right)\cos(\theta_1-\theta_0),$$

می‌بینیم که

$$\cos\left(\tilde{\theta}_0-\theta_0\right)=\frac{1}{B\tilde{B}}\left[\left(\frac{1}{r_1}-\tilde{A}\right)\left(\frac{1}{r_1}-A\right)+\frac{m^2}{L\tilde{L}}v_r(\theta_1)\tilde{v}_r(\theta_1)\right],$$

$$\sin\left(\tilde{\theta}_0-\theta_0\right)=\frac{m}{B\tilde{B}}\left[\left(\frac{1}{r_1}-\tilde{A}\right)\frac{v_r(\theta_1)}{L}-\left(\frac{1}{r_1}-A\right)\frac{\tilde{v}_r(\theta_1)}{\tilde{L}}\right].$$

- تمرین: با فرض آن که ضربه‌ی $\vec{p}$ در راستای شعاعی است و در لحظه‌ی ضربه، ماه‌واره (در مدار نخستین خود) در کم‌ترین یا بیش‌ترین فاصله از زمین قرار داشته است، $\tilde{\theta}_0-\theta_0$ را حساب کنید.

پاسخ: چون $\tilde{L}=L$، $\tilde{A}=A$، $v_r(\theta_1)=0$ و $\tilde{v}_r(\theta_1)=\frac{p_r}{m}$، داریم

$$\cos\left(\tilde{\theta}_0-\theta_0\right)=\frac{1}{B\tilde{B}}\left(\frac{1}{r_1}-A\right)^2,\qquad \sin\left(\tilde{\theta}_0-\theta_0\right)=-\frac{P_r}{B\tilde{B}L}\left(\frac{1}{r_1}-A\right).$$

چون $\cos\left(\tilde{\theta}_0-\theta_0\right)>0$ پس

اگر r_1 نظیر کم‌ترین فاصله ($r_{\min}$) باشد $\frac{1}{r_1} = A - B$ و اگر نظیر بیش‌ترین فاصله ($r_{\max}$) باشد $\frac{1}{r_1} = A + B$. در نتیجه

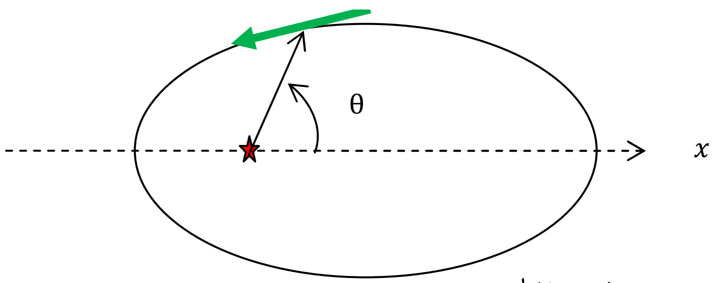
$$\tilde{\theta}_0 - \theta_0 = \eta \arcsin\left(\frac{p_r}{|\tilde{B}|L}\right), \qquad \eta = \begin{cases} -1 & \text{for} \quad r_1 = r_{\min}, \\ 1 & \text{for} \quad r_1 = r_{\max} \end{cases}.$$

کمینه و بیشینه‌ی فاصله‌ی ماهواره از زمین را پس از ضربه با $\tilde{r}_{\min}$ و $\tilde{r}_{\max}$ نشان می‌دهیم. پیدا است که

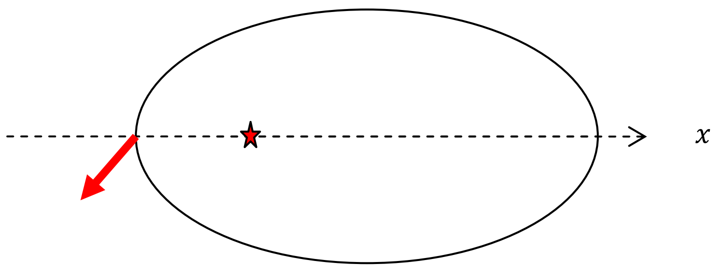
$$\tilde{r}_{\min} = \frac{1}{A - \tilde{B}} = \frac{1}{A - B + \left(B - \tilde{B}\right)} < \frac{1}{A - B} < r_{\min},$$

$$\tilde{r}_{\max} = \frac{1}{A + \tilde{B}} = \frac{1}{A + B - (B - \tilde{B})} > \frac{1}{A - B} > r_{\max}.$$

برای رسم شکل فرض کنید که ضربه را در $r_{\min}$ وارد کرده‌ایم و $p_r < 0$. هم‌چنین فرض کنید که $\theta_0 = 0$. ابتدا مدار پیش از ضربه را رسم می‌کنیم. سرعت ماهواره را در نقطه‌ای پیش از رسیدن به نقطه‌ی کمینه نشان داده‌ایم. در این لحظه، ماهواره به سمت نقطه‌ی کمینه حرکت می‌کند.



در شکل بعدی بردار سرعت ماهواره را درست پس ضربه نشان می‌دهیم.



با مقایسه‌ی این دو شکل در می‌یابیم که پس از ضربه، ماهواره به سمت کمینه‌ی جدید حرکت می‌کند. پس شکل مدار پس از ضربه به صورت زیر است.