پراکندەگی رادرفورد کلاسیک

فرهنگ لران

در پراکندەگی رادرفورد، ذره‌ای به جرم m و بار الکتریکی q از روی ذره‌ای به جرم M و بارالکتریکی Q پراکنده می‌شود. اگر $1 \ll \frac{M}{m}$ می‌توانیم ذره‌ی هدف را در ساکن بگیریم.

- چون نیروی الکتریکی تابعی از فاصله‌ی نسبی دو ذره است، همواره (یعنی به ازای هر مقدار متصور m/M) می‌توانیم مسئله را در دست‌گاه مختصه‌های نسبی حل کنیم. معادله‌ی نیوتن در این دست‌گاه عبارت است از

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}), \qquad \vec{F}(\vec{r}) := \frac{K\vec{r}}{r^3}, \qquad \mu := (m^{-1} + M^{-1})^{-1}, \;\; K := \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0},$$

  و علامت نقطه روی هر کمیت به معنای مشتق زمانی آن کمیت است.

- در آزمایش رادرفورد ذره‌های آلفا (هسته‌های اتم هلیوم) از برگه‌ی طلا پراکنده شدند. پس هرچند در این آزمایش، هر پرتابه (ذره‌ی آلفا) با تعداد زیادی مرکز پراکنده‌گی (هسته‌ی اتم‌های طلا) برهم‌کنش می‌کند، اما چون فاصله‌ی دو هسته‌ی طلا از هم (D) نسبت به ابعاد هر هسته (d) بسیار بزرگ است، عملا می‌توانیم هر هسته‌ی طلا را ذره‌ای منزوی بگیریم.
- تمرین: نسبت $\frac{D}{d}$ را به تخمین حساب کنید.

از آن‌جا که گشتاور نیروی الکتریکی وارد بر پرتابه نسبت به مرکز پراکنده‌گی صفر است ($\vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$) پس حرکت پرتابه از ابتدا تا انتها در صفحه‌ای است که بر بردار تکانه‌ی مدار $\vec{L} := m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ عمود است. برای توصیف حرکت پرتابه در این صفحه، مختصه‌های قطبی $r := \|\vec{r}\|$ و θ را به کار می‌بریم:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}, \qquad \ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} + r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2r\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}.$$

$\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ بردارهای یکه اند.

معادله‌ی حرکت نشان می‌دهد که مسیر حرکت پرتابه، هذلولی به کانون مرکز پراکنده‌گی است که با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$r(\theta) = -\frac{L^2}{mK}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}}\cos(\theta - \theta_0)\right)^{-1},$$

که $L := \|\vec{L}\| = mr^2\dot{\theta}$ اندازه‌ی تکانه‌ی مداری، E انرژی مکانیکی و θ_0 زاویه‌ای است که مقدار آن فقط به انتخاب مبدء سنجش زاویه‌ی θ بسته‌گی دارد.

- برای به دست آوردن این نتیجه تابع $u := r^{-1}$ را تعریف می‌کنیم و آن را تابعی از θ می‌گیریم. پس

$$u' = \frac{\dot{u}}{\dot{\theta}} = -\frac{\dot{r}}{r^2\dot{\theta}}.$$

در نتیجه $\dot{r} = -\frac{L}{m}u'$ و $\ddot{r} = -\frac{L}{m}u''\dot{\theta} = -\left(\frac{L}{m}\right)^2 u''u^2$. همچنین $r\dot{\theta}^2 = \left(\frac{L}{m}\right)^2 u^3$.

با جای‌گذاری در معادله‌ی حرکت شعاعی $\ddot{r} + r\dot{\theta}^2 = \frac{K}{m}u^2$ در می‌یابیم که

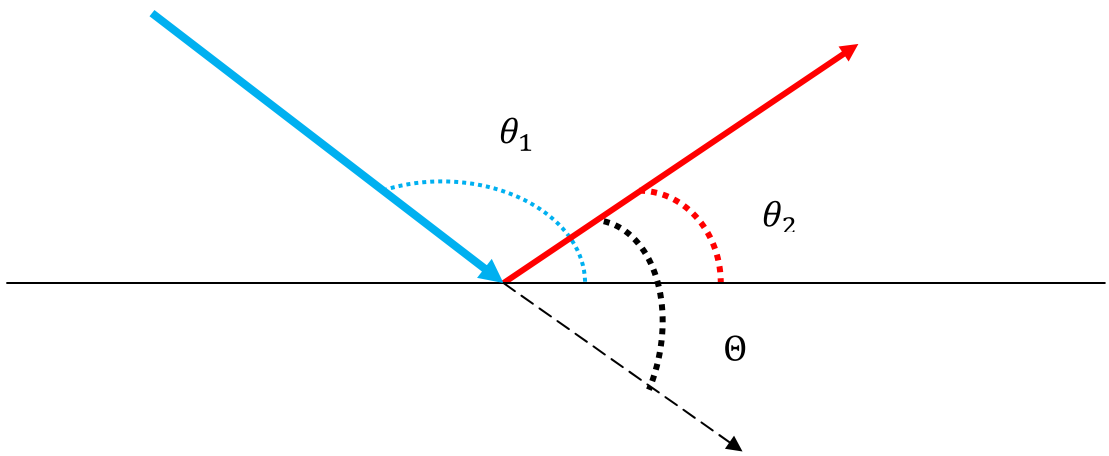
$$u'' + u = -\frac{mK}{L^2}.$$

برای محاسبه‌ی انرژی مکانیکی توجه می‌کنیم که انرژی جنبشی T و انرژی پتانسیل V با رابطه‌های زیر داده می‌شوند.

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) = \frac{L^2}{2m}\left({u'}^2 + u^2\right), \qquad V = Ku.$$

زاویه‌ی پراکنده‌گی:

فرض کنید که زاویه‌ی ورودی پرتابه (زاویه‌ی تابش) θ_1 و زاویه‌ی خروجی آن (پس از پراکنده‌گی) θ_2 باشد. زاویه‌ی بین راستای خروجی نسبت به راستای ورودی را زاویه‌ی پراکنده‌گی می‌نامیم و آن را با Θ نشان می‌دهیم. با توجه به شکل می‌بینیم که $\Theta = \pi - \theta_1 + \theta_2$. همچنین می‌بینیم که $|\Theta| \le \pi$.



چون $r(\theta_1) = r(\theta_2) = \infty$، پس

$$\cos(\theta_1-\theta_0)=\cos(\theta_2-\theta_0)=\left(1+\frac{2EL^2}{mK^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

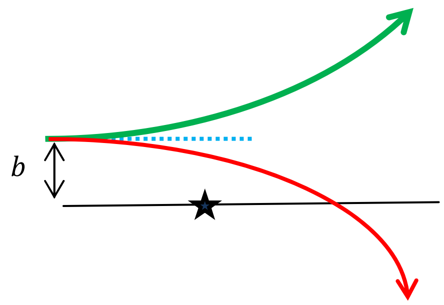
و در نتیجه یا $(\theta_2-\theta_0)-=\theta_1-\theta_0$ یا $\theta_1-\theta_0=\theta_2-\theta_0$. حالت دوم پذیرفته نیست چون در آن صورت $\Theta=\pi$؛ عدد ثابتی که مستقل از ویژه‌گی‌های مسئله‌ی پراکنده‌گی ست! پس ما با در نظر گرفتن تساوی نخست، زاویه‌ی پراکنده‌گی Θ را حساب می‌کنیم: $\Theta=\pi-2(\theta_1-\theta_0)$. پس

$$\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)=\cos(\theta_1-\theta_0)=\left(1+\frac{2EL^2}{mK^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

- تمرین: به ازای چه مقدار L یا E زاویه‌ی پراکنده‌گی برابر π است؟

پارامتر برخورد:

فرض کنید که فاصله‌ی بین مرکز پراکنده‌گی با راستای آغازین حرکت ذره b است. در شکل زیر این پارامتر را برای پراکنده‌گی تحت تاثیر نیروی دافعه (مسیر سبزرنگ) و نیروی جاذبه (مسیر سرخ‌رنگ) نشان داده‌ایم. علامت ستاره در شکل نماینده‌ی مرکز پراکنده‌گی است.

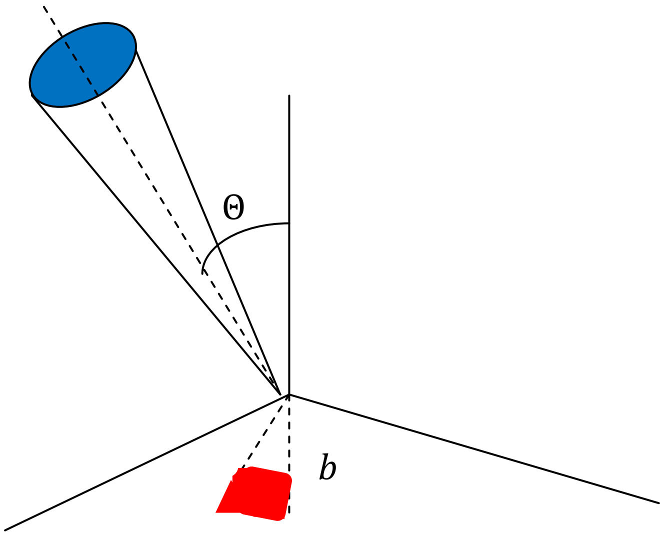


چون $L=(2mE)^{\frac{1}{2}}\,b$ داریم،

$$\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)=\left(1+\frac{4E^2b^2}{K^2}\right)^{-\frac{1}{2}},\qquad \tan\left(\frac{\Theta}{2}\right)=\frac{|K|}{2Eb}.$$

سطح مقطع دیفرانسیلی برخورد:

کمیت قابل اندازه‌گیری در آزمایش‌های پراکنده‌گی سطح مقطع دیفرانسیلی برخورد است که با نماد $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ نشان داده می‌شود. این کمیت نشان می‌دهد که پرتابه‌ای که به سوی ناحیه‌ی سرخ رنگ به سطح $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}b(b\mathrm{d}\varphi)$ نظیر پارامتر برخورد b گسیل شده است، نهایتا در زاویه‌ی فضایی $\mathrm{d}\Omega$ خارج شده است.



در مسئله‌ی رادفورد به دلیل تقارن زاویه‌ای داریم

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{b\mathrm{d}b}{|\sin\Theta\, d\Theta|}.$$

از رابطه‌ی $\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)=\left(1+\frac{4E^2b^2}{K^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ و تساوی $\sin\Theta\, d\Theta=2\mathrm{d}\left[\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)\right]^2$ می‌بینیم که

$$\sin\Theta\, d\Theta=2\mathrm{d}\left[\left(1+\frac{4E^2b^2}{K^2}\right)^{-1}\right]=-\frac{16E^2}{K^2}\left(1+\frac{4E^2b^2}{K^2}\right)^{-2}b\mathrm{d}b.$$

پس در پراکنده‌گی رادرفورد

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{K^2}{16E^2}\left(1+\frac{4E^2b^2}{K^2}\right)^2=\frac{K^2}{16E^2\sin^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)}.$$

- تمرین: اندازه‌ی سطح مقطع کل پراکنده‌گی را حساب کنید.

- تمرین: آیا با اندازه‌گیری تجربی $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ به صورت تابعی از زاویه‌ی پراکنده‌گی Θ و انرژی E و کشف آن که در آزمایش رادرفورد $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{C^2}{E^2\sin^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)}$(که مقدار C با آزمایش تعیین می‌شود) می‌توانیم نتیجه بگیریم که نیروی بین ذره‌ی آلفا و هسته‌ی طلا، با قانون کولن داده می‌شود؟