الکترودینامیک کلاسیک

فرهنگ لران[1]

دانش‌کده‌ی فیزیک، دانش‌گاه صنعتی اصفهان

پاییز ۱۴۰۳

[1] loran@iut.ac.ir

فهرست

مقدمه

از مکانیک نیوتنی می‌آموزیم که ذره‌ای به جرم ناصفر چه‌گونه تحت تاثیر نیروها حرکت می‌کند. فرض کنیم جهان از اتم‌ها و هر اتم هم از هسته و الکترون‌ها ساخته شده است. اگر اثر الکترون‌ها بر یک‌دیگر را نادیده بگیریم، رفتار هر الکترون با نیرویی که هسته به آن وارد می‌کند تعیین می‌شود. برای توصیف این نیرو فرض می‌کنیم که فضای اطراف هسته آکنده از میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی است. یعنی به هر نقطه از فضا با بردار مکان $\vec{x}$، دو بردار $\vec{E}(\vec{x})$ و $\vec{B}(\vec{x})$ نسبت می‌دهیم که $\vec{E}(\vec{x})$ نماینده‌ی میدان الکتریکی در نقطه‌ی $\vec{x}$ و $\vec{B}(\vec{x})$ نماینده‌ی میدان مغناطیسی در آن نقطه است. اگر الکترون را ذره‌ای به جرم ناصفر و بار الکتریکی q بدانیم، نیروی وارد بر آن، در لحظه‌ای که در نقطه‌ی $\vec{x}_e$ قرار دارد، با رابطه‌ی لورنتس داده می‌شود.

$$\vec{F}(\vec{x}_e) = q\vec{E}(\vec{x}_e) + q\vec{v}_e \times \vec{B}(\vec{x}_e).$$

در این رابطه، $\vec{v}_e$ سرعت لحظه‌ای الکترون است.

موضوع درس ما مطالعه‌ی دینامیک میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی است که با معادله‌های ماکسول داده می‌شود. درس از تعریف کمیت اسکالر، بردار، میدان اسکالر و میدان برداری در فصل یک آغاز می‌شود. هم‌چنین تعریف عمل‌گرهای شیب (گرادیان، ∇)، واگرایی (دیورژانس، $\nabla \cdot$)، تاو (کرل، $\nabla \times$) و عمل‌گر لاپلاسی ∇^2 را یادآوری می‌کنیم.

در فصل دوم معادله‌های ماکسول را بررسی می‌کنیم. در این بخش با سه مفهوم انرژی، تکانه‌ی خطی و تکانه‌ی مداری میدان‌های الکترومغناطیسی آشنا می‌شویم و می‌بینیم که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، در حرکتی موجی در هم می‌آمیزند و پرتو نور همان موج «الکترومغناطیسی» است. بر خلاف موج صوتی که در مکانیک نیوتنی توصیف می‌شود، موج الکترومغناطیسی در فضای تهی هم منتشر می‌شود و سرعت انتشار آن از ناظر مستقل است.[2]

در فصل سوم قانون‌های بازتاب و شکست نور را مطالعه می‌کنیم.

---

[2] از این مشاهده دریافتیم که نسبیت گالیله برقرار نیست و راه برای کشف و پذیرش نسبیت خاص اینشتین گشوده شد.

در فصل چهارم بارهای الکتریکی و چندقطبی‌های الکتریکی و مغناطیسی را مطالعه می‌کنیم. با شکل عمل‌گرهای برداری در مختصه‌های قطبی-کروی، و هم‌چنین با توزیع (تابع) دلتای دیراک آشنا می‌شویم. هدف اصلی ما در این بخش، محاسبه و توصیف میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی «ایستا» بر حسب پتانسیل اسکالر و پتانسیل برداری است و ابزار اصلی ما هم تابع گرینِ نظیر معادله‌ی پواسون با شرط مرزی دیریکله و شرط مرزی نویمان خواهد بود.

در فصل پنجم، معادله‌های ماکسول را بر حسب پتانسیل‌های الکتریکی و پتانسیل برداری بازنویسی می‌کنیم، مفهوم آزادی پیمانه‌ای را می‌آموزیم، تابع گرین نظیر عمل‌گر موج را به دست می‌آوریم و تابش امواج الکترومغناطیسی از بارهای الکتریکی شتاب‌دار را مطالعه می‌کنیم. این بخش با توضیح رایلی برای رنگ آبی آسمان به پایان می‌رسد.

در فصل آخر، نظریه‌ی ماکسول را در چارچوب نسبیت خاص اینشتین بازنویسی می‌کنیم.

مرجع اصلی برای حساب برداری و توزیع دلتای دیراک، کتاب روش‌های ریاضی در فیزیک آرفکن است که در درس

«ریاضی‌فیزیک یک» دوره‌ی کارشناسی تدریس می‌شود. فصل دوم بر پایه‌ی بخش‌هایی از فصل ۶ کتاب الکترودینامیک کلاسیک جکسون نوشته شده است. فصل سوم هم برگرفته از فصل ۷ همان کتاب است ولی موضوع آن در کتاب‌های درسی دوره‌ی کارشناسی از جمله کتاب ریتس و میلفورد هم آمده است. فصل چهارم برگرفته از فصل‌های ۱ تا ۵ کتاب جکسون است. فصل پنجم بر فصل‌های ۶ و ۹ و فصل آخر هم بر فصل ۱۱ همان کتاب استوار است.

نسخه‌ی اول این درس‌نامه در طول ترم پاییز ۱۴۰۳ هم‌گام با کلاس درس نوشته خواهد شد. محتوای این درس‌نامه شامل سرخط مطالب و پاره‌ای توضیحات و تمرین‌ها است. هدف از نوشتن این درس‌نامه آن است که دانش‌جویان پیش از حضور در کلاس، از موضوع درس هفته‌ی پیش رو آگاه باشند، و با بازخوانی آن، نکته‌های اصلی را به یاد آورند. این درس‌نامه، صرفا چکیده‌ای از درس و راه‌نمایی برای مطالعه است و مطالعه‌ی آن، جای‌گزین مطالعه‌ی کتاب و حضور در کلاس درس نیست.

۱. حساب برداری

در این فصل تعریف کمیت اسکالر، بردار، میدان اسکالر و میدان برداری، و عمل‌گرهای شیب (گرادیان، ∇)، واگرایی (دیورژانس، $\nabla \cdot$) تاو (کرل، $\nabla \times$) و عمل‌گر لاپلاسی ∇^2 را یادآوری می‌کنیم.

فضای اقلیدسی

فضا را سه بعدی می‌گیریم و آن را با دست‌گاه مختصه‌های دکارتی توصیف می‌کنیم. هر نقطه با مختصه‌های (x_1, x_2, x_3) با بردار مکانی چون $\vec{x}$ داده می‌شود:

$$\vec{x} = x_i \hat{e}_i.$$

در این رابطه، قرارداد اینشتین در «ننوشتن» نماد جمع را به کار برده‌ایم: تکرار روی اندیس i به معنای جمع روی همه‌ی مقدارهای مجاز آن است یعنی

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \hat{e}_i.$$

$\hat{e}_i$ نماد بردار یکه در راستای محور x_i است.

ضرب داخلی

ضرب داخلی بردارهای یکه با دستور زیر داده می‌شود:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j := \delta_{ij}.$$

در این رابطه δ_{ij} نماد دلتای کرونکر است. δ_{ij} درایه‌های ماتریس همانی 3×3 را نشان می‌دهد؛ مقدار آن برای $i = j$ برابر با یک و برای $i \neq j$ برابر با صفر است.

دوران

دوران $R: \hat{e}_i \rightarrow \hat{e}'_i$ تبدیلی خطی روی بردارهای یکه است طوری که ضرب داخلی حفظ شود. هر دوران با نه عدد حقیقی a_{ij} داده می‌شود.

$$\hat{e}'_i := a_{ij}\hat{e}_j, \qquad \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \delta_{ij}.$$

برای تحلیل این رابطه توجه کنیم که

$$\hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = a_{ik}a_{jl}\hat{e}_k \cdot \hat{e}_l = a_{ik}a_{jk}.$$

فرض کنیم که a_{ik} درایه‌های ماتریس A هستند. از آن‌جا که δ_{ij} هم درایه‌های ماتریس همانی I است، درخواست بالا

(حفظ ضرب داخلی پس از تبدیل خطی) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$AA^T = I.$$

ماتریس A^T، ترانهاده‌ی ماتریس A است. از این رابطه می‌آموزیم که ماتریس A وارون‌پذیر است و وارون آن با ترانهاده ش داده می‌شود. هم‌چنین می‌آموزیم که مربع دترمینان ماتریس A برابر با یک است. اگر دترمینان A برابر با یک باشد آن را ماتریس دوران می‌نامیم و با نماد R نشان می‌دهیم.

ضرب خارجی

ضرب خارجی بردارهای یکه با دستور زیر داده می‌شود:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j := \epsilon_{ijk}\hat{e}_k.$$

نماد لوی-چویتا ϵ_{ijk} برابر است با 1، اگر

$$(i, j, k) \in \{(1, 2, 3),\ (2, 3, 1),\ (3, 1, 2)\},$$

برابر است با (-1)، اگر

$$(i, j, k) \in \{(1, 3, 2),\ (3, 2, 1),\ (2, 1, 3)\},$$

و در سایر موارد صفر است.

نماد لوی-چویتا در تعریف دترمینان ماتریس‌های 3×3 هم به کار می‌رود. مثلا

$$det\, R = \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}.$$

قاعده‌ی $BAC - CAB$:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}.$$

بردار

هر کمیتی را که بتوانیم به صورت ترکیب خطی از بردارهای یکه بنویسم، بردار می‌نامیم. مثلا در مکانیک نیوتنی، نیروی $\vec{f}$ بردار است چرا که در هر دستگاه مختصه‌های دکارتی، سه عدد (f_1, f_2, f_3) وجود دارد به طوری که $\vec{f} = f_i \hat{e}_i$.

مئلفه‌های بردارها زیر دوران عوض می‌شوند. برای دریافتن این موضوع فرض کنید که

$$\vec{f} = f_i \hat{e}_i = f'_i \hat{e}_i'.$$

پس

$$f'_i = \vec{f} \cdot \hat{e}_i' = f_j \hat{e}_j \cdot \hat{e}_i' = f_j a_{ij}.$$

اگر این رابطه را به صورت ضرب ماتریسی بنویسیم گویاتر است. ماتریس‌های ستونی $F := (f_1, f_2, f_3)^T$ و $F' := (f'_1, f'_2, f'_3)^T$ را در نظر بگیرید. هر دو ماتریس ستونی F و F'، نظیر بردار $\vec{f}$ هستند. آن‌ها این بردار را در دستگاه دکارتی $\hat{e}_i$ و $\hat{e}_i'$ نمایش می‌دهند. می‌بینیم که

$$F' = RF.$$

طول بردار

طول هر بردار $\vec{V} = V_i \hat{e}_i$ که با نماد $|\vec{V}|$ نشان داده می‌شود، با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود.

$$|\vec{V}| := \sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}} = \sqrt{V_i V_j \delta_{ij}} = \left(\sum_{i=1}^{3} V_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

با این تعریف، طول بردارهای یکه‌ی $\hat{e}_i$ برابر با یک است.

جمع، ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها

جمع، ضرب داخلی و ضرب خارجی دو بردار $\vec{A} = A_i \hat{e}_i$ و $\vec{B} = B_i \hat{e}_i$ با رابطه‌های زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{A} + \vec{B} := (A_i + B_i)\,\hat{e}_i\,,$$
$$\vec{A} \cdot \vec{B} := A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i,$$
$$\vec{A} \times \vec{B} := A_i B_j \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{e}_k.$$

تانسور رتبه دو

تانسور رتبه دو، کمیتی است که با نه مقدار T_{ij} داده می‌شود به طوری که زیر دوران این نه مقدار با دستور زیر تغییر کنند.

$$T'_{ij} = a_{im} a_{jn} T_{mn}.$$

از دو بردار $\vec{A} = A_i \hat{e}_i$ و $\vec{B} = B_i \hat{e}_i$ می‌توانیم با دستور $T_{ij} := A_i B_j$ تانسور رتبه دو بسازیم.

تانسور رتبه سه

تانسور رتبه سه، کمیتی است که با بیست و هفت مقدار T_{ijk} داده می‌شود به طوری که زیر دوران با دستور زیر تغییر کنند.

$$T'_{ijk} = a_{im} a_{jn} a_{kp} T_{mnp}.$$

از سه بردار $\vec{A} = A_i \hat{e}_i$، $\vec{B} = B_i \hat{e}_i$ و $\vec{C} = C_i \hat{e}_i$ می‌توانیم با دستور $T_{ijk} := A_i B_j C_k$ تانسور رتبه سه بسازیم.

نماد لوی-چویتا تانسوری از مرتبه‌ی سه است چرا که بر طبق تعریف دترمینان و با توجه به این که $det\, R = 1$ داریم

$$\epsilon_{lmn} a_{lr} a_{mp} a_{nq} = \epsilon_{rpq} det\, R = \epsilon_{rpq}.$$

میدان اسکالر

فرض کنید به هر نقطه‌ی فضا با مختصه‌های x_i عددی نسبت بدهیم و آن را با $\phi(x_i)$ نمایش دهیم. مثلا دمای هوا میدان است. $X_1(x_i) := x_1$ هم میدان است.

زیر دوران با ماتریس R، مختصه‌های هر نقطه به $x'_i = a_{ij} x_j$ تبدیل می‌شود. فرض کنید که زیر همان دوران، کمیت ϕ هم به کمیت ϕ' تبدیل می‌شود. اگر

$$\phi'(x'_i) = \phi(x_i),$$

آن‌گاه ϕ کمیتی اسکالر است چرا که عددی که به هر نقطه از فضا نسبت داده شده زیر دوران تغییر نکرده است. مثلا

دمای هوا کمیتی اسکالر است اما میدان X_1 کمیتی اسکالر نیست.

میدان برداری

میدان برداری $\vec{V}(x_i)$، به هر نقطه‌ی فضا با مختصه‌های x_i برداری نسبت می‌دهد. روشن است که زیر دوران با ماتریس R، مئلفه‌های آن به شکل زیر تغییر می‌کنند.

$$V_j'(x'_i) = a_{jk} V_k(x_i).$$

شیب (گرادیان)

فرض کنید ϕ میدانی اسکالر است. آن‌گاه

$$\nabla\phi := \partial_i \phi\, \hat{e}_i, \qquad \partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$$

میدان برداری است چرا که

$$\partial'_j \phi'(x'_i) = \partial'_j \phi(x_i) = \frac{\partial x_k}{\partial x'_j} \partial_k \phi(x_i) = a_{jk} \partial_k \phi(x_i).$$

در به دست آوردن آخرین تساوی توجه کرده‌ایم که

$$x_k = \left(R^T\right)_{kj} x'_j = a_{jk} x'_j.$$

واگرایی (دیورژانس)

فرض کنید $\vec{V}$ میدانی برداری است. آن‌گاه

$$\nabla\cdot\vec{V} := \partial_i V_i,$$

میدان اسکالر است زیرا

$$\partial'_j V'_j(x'_i) = \frac{\partial x_k}{\partial x'_j}\partial_k\left(a_{jl}V_l(x_i)\right) = a_{jk}a_{jl}\partial_k V_l(x_i) = \partial_k V_k(x_i).$$

تاو (کرل)

فرض کنید $\vec{V}$ میدانی برداری است. آن‌گاه

$$\nabla\times\vec{V} := W_k\hat{e}_k, \qquad W_k := \epsilon_{ijk}\partial_i V_j,$$

میدان برداری است. برای اثبات این موضوع توجه می‌کنیم که

$$W'_k(x'_i) = \epsilon_{jmn}\partial'_m V'_n(x'_i) = \epsilon_{jmn}\frac{\partial x_p}{\partial x'_m}\partial_p\left(a_{nq}V_q(x_i)\right)$$
$$= \left(\epsilon_{jmn}a_{mp}a_{nq}\right)\partial_p V_q(x_i).$$

می‌دانیم که

$$\begin{aligned}\epsilon_{jmn}a_{mp}a_{nq} &= \delta_{jl}\epsilon_{lmn}a_{mp}a_{nq}\\ &= \left(a_{jr}a_{lr}\right)\epsilon_{lmn}a_{mp}a_{nq}\\ &= a_{jr}\epsilon_{lmn}a_{lr}a_{mp}a_{nq}\end{aligned}$$

$$= a_{jr}\epsilon_{rpq}.$$

در نوشتن تساوی آخر توجه کرده‌ایم که نماد لوی-چویتا تانسور رتبه‌ی سه است. پس

$$W'_k(x'_i) = a_{jr}\left[\epsilon_{rpq}\partial_p V_q(x_i)\right] = a_{jr}W_r(x_i).$$

لاپلاسی

فرض کنید ϕ میدانی اسکالر و $\vec{V}$ میدانی برداری است.

$$\nabla^2\phi := \nabla\cdot(\nabla\phi) = \delta_{ij}\partial_i\partial_j\phi = \left(\sum_{i=1}^{3}\partial_i^{\,2}\right)\phi.$$

$$\nabla^2\vec{V} := \nabla\left(\nabla\cdot\vec{V}\right) - \nabla\times\left(\nabla\times\vec{V}\right).$$

در دستگاه مختصه‌های دکارتی که در آن بردارهای یکه تابع مکان نیستند،

$$\left(\nabla^2\vec{V}\right)_j := \hat{e}_j\cdot\nabla^2\vec{V} = \left(\sum_{i=1}^{3}\partial_i^{\,2}\right)V_j\,.$$

برای اثبات این رابطه از اتحاد BAC-CAB استفاده می‌کنیم:

$$\left[\nabla\times\left(\nabla\times\vec{V}\right)\right]_i = \epsilon_{ijk}\partial_j\left[\epsilon_{klm}(\partial_l V_m)\right]$$

$$= \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)\partial_j\partial_l V_m$$

$$= \partial_i\nabla\cdot\vec{V} - \left(\sum_{j=1}^{3}\partial_j^{\,2}\right)V_i.$$

تمرین.

1.ماتریس $P:=-I$ را در نظر بگیرید. I ماتریس همانی است. نشان دهید $PP^T = I$. آیا P دوران است؟

2.برای دو بردار $\vec{A} = A_i\hat{e}_i$ و $\vec{B} = B_i\hat{e}_i$ نشان دهید

a. جمع آن‌ها بردار است.

b. ضرب داخلی آن‌ها اسکالر است.

c. ضرب خارجی آن‌ها بردار است.

3. فرض کنید ϕ_1 و ϕ_2 میدان اسکالر اند. نشان دهید

a.حاصل‌ضرب $\phi_1\phi_2$ اسکالر است.

b. $\nabla(\phi_1\phi_2) = \phi_2\nabla\phi_1 + \phi_1\nabla\phi_2$

4. فرض کنید ϕ میدانی اسکالر و $\vec{V}$ میدانی برداری است. نشان دهید

a.حاصل‌ضرب $\phi\vec{V}$ بردار است.

b. $\nabla\cdot\left(\phi\vec{V}\right) = \nabla\phi\cdot\vec{V} + \phi\nabla\cdot\vec{V}$

c. $\nabla\times\left(\phi\vec{V}\right) = \nabla\phi\times\vec{V} + \phi\nabla\times\vec{V}$

5. میدان پتانسیل الکتریکی نظیر بار نقطه‌ای $q = 4\pi\epsilon_0$ که در مبدء مختصه‌ها نشسته است با رابطه‌ی

داده می‌شود. گرادیان و لاپلاسی آن را $\phi(x_i) := \left|\vec{x}\right|^{-1}$
حساب کنید.

6. میدان پتانسیل الکتریکی نظیر دوقطبی الکتریکی $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \vec{p}_0$ که در مبدء مختصه‌ها نشسته است با رابطه‌ی $\phi(x_i) := \left|\vec{x}\right|^{-3} \vec{p}_0 \cdot \vec{x}$ داده می‌شود. $\vec{p}_0$ برداری ثابت است. گرادیان و لاپلاسی آن را حساب کنید.
7. تاو، واگرایی و لاپلاسی میدان برداری $\vec{A} := \left|\vec{x}\right|^{-3} \left(\vec{m} \times \vec{x}\right)$ را حساب کنید. $\vec{m}$ برداری ثابت است.

۲. معادله‌های ماکسول

در این فصل معادله‌های ماکسول را بررسی می‌کنیم. با سه مفهوم انرژی، تکانه‌ی خطی و تکانه‌ی مداری میدان‌های الکترومغناطیسی آشنا می‌شویم. دینامیک میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در فضای تهی از بارها و جریان‌های الکتریکی را بررسی می‌کنیم و می‌بینیم که این میدان‌ها در حرکتی موجی در هم می‌آمیزند؛ پرتو نور همان موج «الکترومغناطیسی» است و سرعت انتشار نور در فضای تهی، از ناظر مستقل است.

الکترومغناطیس در محیط مادی

قانون‌های ماکسول در بزرگ-مقیاس[3]، یعنی با چشم‌پوشی از ساختار ماده، با چهار رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$\nabla . \vec{B}(\vec{x}, t) \;=\; 0,$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}, t) \;+\; \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{x}, t) \;=\; \vec{0},$$

$$\nabla . \vec{D}(\vec{x}, t) \;=\; \rho(\vec{x}, t),$$

3 Macroscopic Electromagnetism

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}(\vec{x}, t) = \vec{J}(\vec{x}, t).$$

میدان $\vec{D}$ را میدان جابه‌جایی الکتریکی و میدان $\vec{H}$ را میدان شدت مغناطیسی می‌نامند.[4] ρ چگالی بار الکتریکی و $\vec{J}$ هم چگالی جریان الکتریکی است. برای حل معادله‌های ماکسول می‌توانیم از دو معادله‌ی نخست آغاز کنیم. معادله‌ی اول می‌گوید که میدانی برداری چون $\vec{A}$ (به نام پتانسیل برداری) هست به طوری که

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{x}, t).$$

معادله‌ی دوم هم که به نام قانون القای فارادی شناخته می‌شود می‌گوید میدانی اسکالر چون ϕ (به نام پتانسیل اسکالر) هست جوری که

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\nabla\phi(\vec{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x}, t).$$

برای حل دو معادله‌ی بعدی (که تعمیمی از قانون گاوس و قانون آمپر اند) باید رابطه‌ی بین $\vec{D}$ و $\vec{H}$ با میدان $\vec{E}$ و $\vec{B}$ را بدانیم. این رابطه که به ویژه‌گی‌های مادی محیط وابسته

---

[4] جکسون H را میدان مغناطیسی و B را القای مغناطیسی می‌نامد.

است، پیچیده و سرشار از شگفتی است.[5] پدیده‌ی رنگین‌کمان مثالی آشنا است.

معادله‌ی پیوسته‌گی

با توجه به این که $\nabla . \left[\nabla \times \vec{H}(\vec{x}, t)\right] = 0$ از (تعمیم) قانون آمپر و (تعمیم) قانون گوس به معادله‌ی پیوسته‌گی چگالی بار و چگالی جریان الکتریکی می‌رسیم.

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x}, t) = 0.$$

نیروی لورنتس[6]

نیروی وارد بر ذره‌ای با بار الکتریکی q که از نقطه‌ی $\vec{x}$ با سرعت لحظه‌ای $\vec{v}$ می‌گذرد با این رابطه داده می‌شود.

$$\vec{F}(\vec{x}) = q\vec{E}(\vec{x}) + q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}).$$

- نیرو، آهنگ تغییر تکانه است.
- آهنگ تغییر تکانه‌ی مداری ذره نسبت به نقطه‌ی O با بردار مکان $\vec{x}_O$ برابر است با

---

[5] بخش ۴ از مقدمه‌ی کتاب جکسون را ببینید.

[6] Lorentz force

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_O := \left(\vec{x} - \vec{x}_O\right) \times \vec{F}(\vec{x}).$$

- توان، آهنگ انجام کار و تغییر انرژی مکانیکی ذره در زمان است که با $\vec{F}\cdot\vec{v} = q\vec{v}\cdot\vec{E}$ داده می‌شود.

بخش بسیار کوچکی از فضا به حجم ΔV گرد نقطه‌ی $\vec{x}$ را در نظر بگیرید که شامل تعدادی ذره است که در لحظه‌ی t همه‌گی کمابیش با سرعت $\vec{v}(\vec{x},t)$ حرکت می‌کنند. مجموع بار الکتریکی آن‌ها را با ΔQ نشان می‌دهیم. به این ناحیه از فضا چگالی بار الکتریکی ρ و چگالی جریان الکتریکی $\vec{J}$ نسبت می‌دهیم.

$$\rho(\vec{x},t) := \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta V}, \qquad \vec{J}(\vec{x},t) := \rho(\vec{x},t)\,\vec{v}(\vec{x},t).$$

پس نیروی لورنتسی که به این ناحیه از فضا وارد می‌شود، در حد $\Delta V \to 0$ با عبارت زیر داده می‌شود

$$\vec{F}(\vec{x},t) = \left[\rho(\vec{x},t)\,\vec{E}(\vec{x},t) + \vec{J}(\vec{x},t)\times\vec{B}(\vec{x},t)\right]\Delta V,$$

و آهنگ تغییر تکانه‌ی ذره‌های باردار در واحد حجم برابر است با

$$\rho(\vec{x},t)\,\vec{E}(\vec{x},t) + \vec{J}(\vec{x},t)\times\vec{B}(\vec{x},t).$$

توان در واحد حجم هم با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$\rho(\vec{x}, t)\ \vec{E}(\vec{x}, t)\ \cdot \vec{v}(\vec{x}, t)\ = \vec{J}(\vec{x}, t)\ \cdot \vec{E}(\vec{x}, t).$$

قضیه‌ی پوینتینگ[7]

از (تعمیم) قانون آمپر می‌دانیم که در هر $\vec{x}$ و t

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}.$$

پس توان در واحد حجم برابر است با

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot \left(\nabla \times \vec{H}\right) - \vec{E} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\right).$$

می‌دانیم که

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) &= \partial_i\left(\epsilon_{ijk} E_j H_k\right)\\ &= \left(\epsilon_{ijk}\partial_i E_j\right)H_k - \left(\epsilon_{ikj}\partial_i H_k\right)E_j\\ &= \left(\nabla \times \vec{E}\right)\cdot \vec{H} - \left(\nabla \times \vec{H}\right)\cdot \vec{E}.\end{aligned}$$

با جای‌گذاری این نتیجه در رابطه‌ی توان و استفاده از قانون القای فارادی درمی‌یابیم

---

[7] Poynting's Theorem

$$\vec{J}\cdot\vec{E} + \nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) + \vec{E}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\right) + \vec{H}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right) = 0.$$

در فضای تهی

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}, \qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B},$$

که ϵ_0 گذردهی خلأ و μ_0 ضریب تراوایی مغناطیسی آن است. پس

$$\vec{E}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\right) + \vec{H}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right) = \frac{\partial}{\partial t}u,$$

که «چگالی انرژی الکترومغناطیسی» u با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود.

$$u := \frac{\epsilon_0}{2}\left|\vec{E}\right|^2 + \frac{\mu_0}{2}\left|\vec{H}\right|^2.$$

اگر «جریان انرژی» را هم با بردار پوینتینگ

$$S := \vec{E}\times\vec{H},$$

تعریف کنیم درمی‌یابیم

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \nabla\cdot\vec{S} = -\vec{J}\cdot\vec{E}.$$

هم‌چنین با به کار بردن قضیه‌ی گوس می‌بینیم که

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\, u = -\int_V d^3x\, \vec{J}\cdot\vec{E} - \oint_A da\left(\hat{n}\cdot\vec{S}\right).$$

در این رابطه، A سطح بسته‌ای است که ناحیه‌ی V را دربرگرفته است. $\hat{n}$ بردار عمود بر سطح است که به بیرون ناحیه‌ی انتگرال‌گیری اشاره می‌کند. پس با تفسیر $\hat{n}\cdot\vec{S}$ به آهنگ تابش انرژی از واحد سطح و تفسیر u به چگالی انرژی الکترومغناطیسی، از معادله‌های ماکسول (در فضای تهی) می‌آموزیم که آهنگ تغییر مقدار انرژی الکترومغناطیسی در هر ناحیه از فضا برابر است با آهنگ انجام کار بر روی ذره‌های باردار در آن ناحیه، به علاوه‌ی آهنگ تابش انرژی از آن ناحیه.

تکانه‌ی خطی

از نیروی لورنتس می‌آموزیم که آهنگ تغییر چگالی تکانه‌ی خطی $\vec{P}$ با زمان با عبارت زیر داده می‌شود.

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{P} = \rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}.$$

به کمک (تعمیم) قانون آمپر و (تعمیم) قانون گوس می‌توانیم $\rho(\vec{x}, t)$ و $\vec{J}(\vec{x}, t)$ را برحسب میدان‌ها بنویسیم.

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{P} = \left(\nabla \cdot \vec{D}\right)\vec{E} + \left(\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\right) \times \vec{B}$$

$$+ \left(\nabla \cdot \vec{B}\right)\vec{H} + \left(\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right) \times \vec{D}.$$

البته آن‌چه که در خط دوم نوشته‌ایم و به $\frac{\partial}{\partial t}\vec{P}$ افزوده‌ایم متحد با صفر است! می‌دانیم

$$\begin{aligned}\left(\nabla \times \vec{H}\right) \times \vec{B} &= \hat{e}_i\, \epsilon_{ijk}\left(\nabla \times \vec{H}\right)_j B_k \\ &= \hat{e}_i\, \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}\left(\partial_l H_m\right)B_k \\ &= \hat{e}_i\left(\partial_k H_i\right)B_k - \hat{e}_i\left(\partial_i H_k\right)B_k\,,\end{aligned}$$

که در نوشتن آخرین تساوی، از اتحاد بک-کب استفاده کرده‌ایم. از آن جا که در دست‌گاه مختصه‌های دکارتی، بردار یکه‌ی $\hat{e}_i$ مستقل از مکان است، داریم

$$\hat{e}_i\left(\partial_k H_i\right)B_k = B_k\partial_k\vec{H} = \left(\vec{B} \cdot \nabla\right)\vec{H}.$$

پس

$$\left(\nabla \times \vec{H}\right) \times \vec{B} = \left(\vec{B} \cdot \nabla\right)\vec{H} - B_k\nabla H_k\,.$$

با محاسبه‌ی مشابه درمی‌یابیم که

$$\left(\nabla \times \vec{E}\right) \times \vec{D} = \left(\vec{D} \cdot \nabla\right)\vec{E} - D_k \nabla E_k$$

با جای‌گذاری این دو نتیجه در رابطه‌ی اصلی، می‌بینیم که

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{P} = \left(\nabla \cdot \vec{D}\right)\vec{E} + \left(\vec{D} \cdot \nabla\right)\vec{E} + \left(\nabla \cdot \vec{B}\right)\vec{H} + \left(\vec{B} \cdot \nabla\right)\vec{H}$$

$$- \left(D_k \nabla E_k + B_k \nabla H_k\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{D} \times \vec{B}\right).$$

در فضای تهی داریم

$$\left(\nabla \cdot \vec{D}\right)E_i + \left(\vec{D} \cdot \nabla\right)E_i = \epsilon_0 \partial_j \left(E_i E_j\right),$$

$$\left(\nabla \cdot \vec{B}\right)\vec{H} + \left(\vec{B} \cdot \nabla\right)\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\partial_j \left(B_i B_j\right),$$

$$D_k \nabla E_k + B_k \nabla H_k = \nabla u,$$

$$\vec{g} := \vec{D} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{S}.$$

پس

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(P_i + g_i\right) = \partial_j T_{ij}, \quad T_{ij} := \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \delta_{ij} u.$$

T را تانسور تنش ماکسول[8] و $\vec{g}$ را چگالی تکانه‌ی خطی میدان الکترومغناطیسی می‌نامیم. از این نتیجه درمی‌یابیم که آهنگ تغییرات تکانه‌ی کل، یعنی مجموع تکانه‌ی بارها و میدان‌ها، برابر است با

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\left(P_i+g_i\right)=\oint_A T_{ij}n_j.$$

در این تساوی، A سطح بسته‌ای است که ناحیه‌ی V را دربرگرفته است، $n_j=\hat{e}_j\cdot\hat{n}$ و $\hat{n}$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح است.

تکانه‌ی مداری

در این بخش، بحث را به فضای تهی محدود می‌کنیم. از نیروی لورنتس می‌آموزیم که آهنگ تغییر چگالی تکانه‌ی مداری ذره‌های باردار نسبت به نقطه‌ی $\vec{x}_0$، $\vec{\ell}_0:=\left(\vec{x}-\vec{x}_0\right)\times\vec{P}$، با زمان با عبارت زیر داده می‌شود.

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\ell}_0=\left(\vec{x}-\vec{x}_0\right)\times\left(\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}\right).$$

[8] Maxwell stress tensor

چگالی تکانه‌ی مداری میدان الکترومغناطیسی نسبت به نقطه‌ی $\vec{x}_O$ را با رابطه‌ی $\vec{\ell}_o^{\,EM} := \left(\vec{x} - \vec{x}_O\right) \times \vec{g}$ تعریف می‌کنیم. پس با استفاده از نتیجه‌های بخش پیش می‌دانیم که

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\ell}_O + \vec{\ell}_o^{\,EM}\right) = \hat{e}_i\, \epsilon_{ijk}\left(\vec{x} - \vec{x}_O\right)_j \partial_l T_{kl}$$
$$= \partial_l\left[\hat{e}_i \epsilon_{ijk}\left(\vec{x} - \vec{x}_O\right)_j T_{kl}\right].$$

برای به دست آوردن تساوی دوم توجه کرده‌ایم که T تانسوری متقارن است و در نتیجه

$$\epsilon_{ijk}\left[\partial_l\left(\vec{x} - \vec{x}_O\right)_j\right]T_{kl} = \epsilon_{ijk}\delta_{lj}T_{kl} = \epsilon_{ijk}T_{kj} = 0.$$

با تعریف

$$M_{il} := \epsilon_{ikj}\, T_{kl}\left(\vec{x} - \vec{x}_O\right)_j,$$

می‌توانیم این نتیجه را به صورت زیر بنویسیم.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\ell}_O + \vec{\ell}_{EM}\right) + \partial_l\left(\hat{e}_i\, M_{il}\right) = 0.$$

معادله‌ی موج

دو تابع

$$f_{\pm}(x,t):=f_{\pm}(x\pm vt),\qquad v>0,$$

را در نظر بگیرید. f_{+} موجی را نمایش می‌دهد که به سمت چپ محور x حرکت می‌کند. برای تایید این ادعا فرض کنید که

$$f_{+}(x,t)=f_{+}(x+vt,0),$$

یعنی در هر لحظه‌ی $t=\tau>0$ مقدار f_{+} در هر نقطه‌ای چون x برابر است با مقداری که f_{+} در آغاز $(t=0)$ در نقطه‌ی $x+v\tau$ داشته است! استدلال مشابهی نشان می‌دهد که f_{-} موجی است که به سمت راست محور x حرکت می‌کند.

هر دو تابع، پاسخ معادله‌ی موج اند.

$$\left(\partial_x^{\,2}-\frac{1}{v^2}\partial_t^{\,2}\right)f(x,t)=0.$$

در سه بعد، عمل‌گر موج برای میدانی که با سرعت v منتشر می‌شود با رابطه‌ی

$$\Box_v:=\frac{1}{v^2}\partial_t^{\,2}-\nabla^2,$$

تعریف می‌شود. در این بخش می‌بینیم که در فضای تهی از بارها و جریان‌های الکتریکی

$$\Box_c \vec{E}(\vec{x}, t) = 0, \qquad \Box_c \vec{B}(\vec{x}, t) = 0,$$

که c، سرعت انتشار امواج الکترومغناطیسی با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$c := \left(\epsilon_0 \mu_0\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

برای اثبات این ادعا، توجه می‌کنیم که قانون‌های ماکسول در فضای تهی از بارها و جریان‌های الکتریکی به صورت زیر داده می‌شود.

$$\nabla . \vec{B} = 0, \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \vec{0},$$

$$\nabla . \vec{E} = 0, \qquad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \vec{0}.$$

پس

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right) = \vec{0}.$$

اما

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} = - \nabla^2 \vec{E},$$

و

$$\nabla \times \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{B}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}.$$

در نتیجه $\Box_c \vec{E} = \vec{0}$.

در دست‌گاه مختصه‌های دکارتی که در آن بردارهای یکه تابع مکان نیستند، گزاره‌ی «میدان الکتریکی در معادله‌ی موج صدق می‌کنند» به این معنا است که

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^{\,2} - \sum_{i=1}^{3} \partial_i^{\,2}\right)E_j = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

پاسخ معادله‌ی موج

در فضای تهی از بارها و جریان‌های الکتریکی، میدان الکتریکی، پاسخ معادله‌ی موج $\Box_c \vec{E} = \vec{0}$ و معادله‌ی کولن $\nabla \cdot \vec{E} = \vec{0}$ است. پس از محاسبه‌ی میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی از قانون القای فارادی به دست می‌آید.

موج ایستای تک‌فام

فرض کنید

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}, \omega) \cos(\omega t + \phi).$$

با جای‌گذاری در معادله‌ی موج و قانون کولن درمی‌یابیم که

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{E}(\vec{x}, \omega) = \vec{0},$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}, \omega) = 0.$$

پاسخ معادله‌ی اول را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$\vec{E}(\vec{x}, \omega) = \vec{E}(\vec{k}, \omega) \cos\left(\vec{k} \cdot \vec{x} + \psi(\vec{k})\right), \qquad \left|\vec{k}\right| = \frac{\omega}{c}.$$

در شکل کلی‌تر $\vec{E}(\vec{x}, \omega)$ ترکیب خطی از پاسخ‌هایی است که اندازه‌ی بردار موج $(\vec{k})$ آن‌ها برابر با $\frac{\omega}{c}$ است. از قانون کولن معلوم می‌شود که

$$\vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega) = 0.$$

برای محاسبه‌ی میدان مغناطیسی قانون القای فارادی را به کار می‌بریم.

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{k} \times \vec{E}(\vec{k}, \omega) \sin\left(\vec{k} \cdot \vec{x} + \psi(\vec{k})\right) \times \cos(\omega t + \phi).$$

از حل این معادله درمی‌یابیم که

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}(\vec{k}, \omega) \sin\left(\vec{k} \cdot \vec{x} + \psi(\vec{k})\right) \times \sin(\omega t + \phi).$$

برای محاسبه‌ی چگالی انرژی توجه می‌کنیم که

$$\left|\vec{E}(\vec{x}, t)\right|^2 = \left|\vec{E}(\vec{k}, \omega)\right|^2 \cos^2\left(\vec{k} \cdot \vec{x} + \psi(\vec{k})\right) \times \cos^2(\omega t + \phi),$$

$$\left|\vec{B}(\vec{x},t)\right|^2 = c^{-2}\left|\vec{E}(\vec{k},\omega)\right|^2 \sin^2\left(\vec{k}\cdot\vec{x} + \psi(\vec{k})\right)$$
$$\times \sin^2(\omega t + \phi).$$

برای محاسبه‌ی میانگین زمانی این کمیت‌ها توجه می‌کنیم که

$$< \sin^2(\omega t + \phi) >= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} dt \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2},$$
$$< \cos^2(\omega t + \phi) >= 1 - < \sin^2(\omega t + \phi) >= \frac{1}{2}.$$

پس میانگین زمانی چگالی انرژی برابر است با

$$\bar{u} = \frac{\epsilon_0}{4}\left|\vec{E}(\vec{k},\omega)\right|^2.$$

محاسبه‌ی بردار پوینتینگ آسان است.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(\vec{x},t) \times \vec{B}(\vec{x},t)$$
$$= \frac{\vec{k}}{4\mu_0\omega}\left|\vec{E}(\vec{k},\omega)\right|^2 \sin\left(2\vec{k}\cdot\vec{x} + 2\psi(\vec{k})\right)$$
$$\times \sin(2\omega t + 2\phi).$$

برای نوشتن این نتیجه، اتحاد مثلثاتی زیر را به کار برده‌ایم.

$$\sin(2\phi) = 2\sin\phi\cos\phi.$$

روشن است که میانگین زمانی بردار پوینتینگ صفر است. این نتیجه با آن‌چه که از موج ایستا انتظار داریم هم‌خوان است. به طور کلی اگر

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}, \omega) \cos(\omega t + \phi),$$

از قانون القای فارادی دیده می‌شود که

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = -\omega^{-1} \nabla \times \vec{E}(\vec{x}, \omega) \sin(\omega t + \phi),$$

و در نتیجه

$$\vec{S} = -\frac{1}{2\mu_0 \omega}\left[\vec{E}(\vec{x}, t) \times \left(\nabla \times \vec{E}(\vec{x}, \omega)\right)\right] \sin(2\omega t + 2\phi).$$

موج رونده‌ی تک‌فام

فرض کنید

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{k}, \omega) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} + \phi).$$

با جای‌گذاری در معادله‌ی موج و قانون کولن درمی‌یابیم که

$$\left|\vec{k}\right| = \frac{\omega}{c}, \qquad \vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega) = 0.$$

در شکل کلی‌تر $\vec{E}(\vec{x}, \omega)$ ترکیب خطی از پاسخ‌هایی است که اندازه‌ی بردار موج $(\vec{k})$ آن‌ها برابر با $\frac{\omega}{c}$ است.

برای محاسبه‌ی میدان مغناطیسی قانون القای فارادی را به کار می‌بریم.

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{x},t) =- \vec{k} \times \vec{E}(\vec{k},\omega)\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} + \phi).$$

پس

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}(\vec{k},\omega)\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} + \phi).$$

از تساوی

$$\left|\vec{E}(\vec{x},t)\right|^2 = c^2\left|\vec{B}(\vec{x},t)\right|^2,$$

درمی‌یابیم که چگالی انرژی و میانگین زمانی آن با تساوی‌های زیر داده می‌شود.

$$u = \epsilon_0\left|\vec{E}(\vec{x},t)\right|^2, \qquad < u >= \frac{\epsilon_0}{2}\left|\vec{E}(\vec{k},\omega)\right|^2.$$

با محاسبه‌ی بردار پوینتینگ به نتیجه‌ی مهمی می‌رسیم.

$$\vec{S} = c\,u\,\hat{k}, \qquad \hat{k} := \frac{\vec{k}}{\left|\vec{k}\right|}.$$

آن‌چنان که از مفهوم موج رونده انتظار داریم، میانگین زمانی بردار پوینتینگ ناصفر است.

تمرین

1.مقدار عددی $c = \left(\epsilon_0 \mu_0\right)^{-\frac{1}{2}}$، سرعت انتشار موج الکترومغناطیسی در فضای تهی از بارها و جریان‌های الکتریکی، را حساب کنید. کدام ناظرِ لخت‌ی این عدد را محاسبه کرده است؟ آیا این نتیجه از قانون سرعت‌های نسبی در نسبیت گالیله پیروی می‌کند؟

2.نشان دهید که در فضای تهی از بارها و جریان‌های الکتریکی $\Box_c \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{0}$.

3. ناحیه‌ای از فضا، از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسیِ «مستقل از زمان» آکنده است.

a.این میدان‌ها با چه معادله‌هایی توصیف می‌شوند؟

b.فرض کنید A سطحی بسته در این ناحیه است.

$\int_A da\, \vec{S} \cdot \hat{n}$ را حساب کنید.

4.خازنی از دو صفحه‌ی مسطح دایره‌ای به شعاع a که به فاصله‌ی d از یک‌دیگر قرار دارند ساخته شده است.

خازن با جریان ثابت I در حال باردار شدن است. فرض کنید میدان الکتریکی بین دو صفحه یک‌نواخت است.

a. اندازه‌ی میدان الکتریکی و مغناطیسی را روی سطح استوانه‌ایِ ناحیه‌ی بین دو صفحه (A) حساب کنید.

b. بردار پوینتینگ و انتگرال $\vec{S} \cdot \hat{n}$ را روی A حساب کنید.

c. آهنگ تغییر انرژی ذخیره شده در خازن را حساب کنید.

5. سیمی استوانه‌ای با مقاومت الکتریکی R و اندازه‌ی سطح مقطع A، حامل جریانِ پایای I است. بردار پوینتینگ و انتگرال $\vec{S} \cdot \hat{n}$ را روی سطحِ قطعه‌ای از سیم به طول L حساب کنید.

6. فرض کنید میدان الکتریکی در فضای تهی از بارها و جریان‌های الکتریکی، با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = E_0 \sin(kz - \omega t)\hat{e}_1, \quad z := \hat{e}_3 \cdot \vec{x}.$$

a. میدان مغناطیسی را بیابید.

b. رابطه‌ی بین عدد موج k و بسامد ω را بیابید.

c. بردار پوینتینگ و تانسور تنش ماکسول را حساب کنید.

7. فرض کنید میدان الکتریکی در ناحیه‌ی $y \in (0, L)$ از فضای تهی از بارها و جریان‌های الکتریکی با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = E_0 \sin\frac{n\pi y}{L}\ \sin(kz - \omega t)\hat{e}_1,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

a. فرض کنید در $y = 0$ صفحه‌ای رسانا قرار دارد. چگالی سطحی بار الکتریکی آن را حساب کنید.

b. میدان مغناطیسی در ناحیه‌ی $y \in (0, L)$ را بیابید.

c. رابطه‌ی بین عدد موج k و بسامد ω را بیابید.

d. بردار پوینتینگ و تانسور تنش ماکسول را حساب کنید.

8. فرض کنید در $y = 0$ و $y = L$ دو صفحه‌ی رسانا قرار دارد و ناحیه‌ی $y \in (0, L)$ از بارها و جریان‌های الکتریکی تهی است. فرض کنید که میدان مغناطیسی در این ناحیه با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = B_0 \sin\left(\frac{y}{\lambda} + \phi\right)\ \sin(kz - \omega t)\hat{e}_1.$$

a. میدان الکتریکی را بیابید.

b. با توجه به آن که میدان الکتریکی در $y = 0$ و $y = L$ صفر است، مقدارهای مجاز λ و ϕ را تعیین کنید.

c. رابطه‌ی بین عدد موج k و بسامد ω را بیابید.

d. بردار پوینتینگ و تانسور تنش ماکسول را حساب کنید.

9. قضیه‌ی پوینتینگ را برای محیطی خطی، نارسانا، هم‌گن، هم‌سان‌گرد و ناپاشنده با گذردهی ϵ و ضریب تراوایی مغناطیسی μ بازنویسی کنید. یعنی فرض کنید که

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}, \qquad \vec{B} := \mu\vec{H},$$

و ϵ و μ را اسکالرهایی مستقل از مکان و زمان بگیرید. چگالی انرژی و بردار پوینتینگ را به دست آورید.

۳. بازتاب و شکست نور

در این فصل قانون‌های بازتاب و شکست نور تک‌فام را مطالعه می‌کنیم. فرض می‌کنیم که فضا در راستای محور سوم، از مبدء به دو نیم‌فضا تقسیم شده است. هر نیم‌فضا با ماده‌ای خطی، هم‌گن و همسان‌گرد با گذردهی ϵ و ضریب تراوایی مغناطیسی μ پر شده است.

در آغاز خواهیم دید که مئلفه‌های عمودی $\vec{B}$ و $\vec{D}$ در مرز دو ناحیه پی‌وسته است. هم‌چنین مئلفه‌های مماسی $\vec{H}$ و $\vec{E}$ پی‌وسته است. سپس معادله‌های ماکسول را برای پاسخی با بسته‌گی زمانی هم‌آهنگ[9] بازنویسی می‌کنیم. پس از آن، چیدمانی را در نظر می‌گیریم که در آن، از یک‌سوی محور سوم، موج تختی از دوردست به مرز می‌تابد، بخشی از آن بازتابیده می‌شود و بخشی می‌گذرد. نشان می‌دهیم پرتوهای بازتابیده و گذر کرده، بر صفحه‌ی تابش می‌نشینند و زاویه‌ی بازتاب با زاویه‌ی تابش برابر است. قانون اسنل را هم برای محاسبه‌ی زاویه‌ی شکست به دست می‌آوریم. قطبش‌های عمود و موازی با صفحه‌ی تابش را معرفی می‌کنیم و

[9] Harmonic time dependence

ضریب‌های بازتاب و گذر را نظیر هر قطبش محاسبه می‌کنیم.

شرط‌های مرزی[10]

در این بخش می‌بینیم که مئلفه‌های عمودی $\vec{B}$ و $\vec{D}$ و مئلفه‌های مماسی $\vec{H}$ و $\vec{E}$ در مرز دو ناحیه پی‌وسته است. ما فرض می‌کنیم فضا در راستای محور سوم، $z := x_3$، از مبدء به دو نیم‌فضا تقسیم شده است. پس مرز دو ناحیه منطبق بر صفحه‌ی (x, y) است.

$$x := x_1, \qquad y := x_2 .$$

نیم‌فضای بالایی $z > 0$ با ماده‌ای خطی، هم‌گن و هم‌سان‌گرد با گذردهی ϵ_2 و ضریب تراوایی مغناطیسی μ_2 و نیم‌فضای پایینی $z < 0$ با ماده‌ای خطی، هم‌گن و هم‌سان‌گرد با گذردهی ϵ_1 و ضریب تراوایی مغناطیسی μ_1 پر شده است.

[10] Boundary conditions

پیوستگی مئلفه‌های عمودی $\vec{B}$ و $\vec{D}$

سطح ِ گوسی ِ استوانه‌ای شکل ِ S را به طول 2ℓ و سطح مقطع A در نظر بگیرید، جوری که کفه‌ها در $z=\pm\ell$ بنشینند. حجم درون این استوانه را V می‌نامیم. از قضیه‌ی گوس می‌دانیم که

$$0 = \int_V d^3x\, \nabla\cdot\vec{B} = \oint_S da\, \vec{B}\cdot\hat{n}.$$

در حد $\ell\to 0$ و برای مقدار متناهی و ناصفر A، انتگرال سطحی سمت راست، به جمع دو جمله، یکی مربوط به کفه‌ی بالایی در $z=\ell$ و دیگری مربوط به کفه‌ی پایینی در $z=-\ell$ فرومی‌کاهد. چون در کفه‌ی بالایی $\hat{n}=\hat{e}_3$ و در کفه‌ی پایینی $\hat{n}=-\hat{e}_3$، نتیجه می‌گیریم که

$$\int_A da\, B_3\left(x,y,0^-\right) = \int_A da\, B_3\left(x,y,0^+\right),$$

که در این تساوی،

$$B_3\left(x,y,0^\pm\right) := \lim_{\ell\to 0} B_3(x,y,\pm\ell).$$

برای آن که بتوانیم از این تساوی نتیجه‌ای بگیریم، فرض کنید که تصویر کفه‌ها روی صفحه‌ی (x, y) قرصی به شعاع R به مرکز نقطه‌ی (x_0, y_0) است. با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین و در حد $R \to 0$ درمی‌یابیم که

$$B_3\left(x_0, y_0, 0^-\right) = B_3\left(x_0, y_0, 0^+\right).$$

با استدلالی مشابه می‌بینیم که در نبود بارهای سطحی

$$D_3\left(x_0, y_0, 0^-\right) = D_3\left(x_0, y_0, 0^+\right).$$

چون نقطه‌ی (x_0, y_0) دل‌خواه است، نتیجه می‌گیریم که مئلفه‌های عمودی $\vec{B}$ و $\vec{D}$ در مرز پی‌وسته اند.

یادداشت

اگر چگالی بار سطحی در مرز دو ناحیه ناصفر باشد آن‌گاه

$$\lim_{\ell\to 0} \int_V d^3x\, \nabla \cdot \vec{D} = \lim_{\ell\to 0} Q = \int da\, \sigma(x, y),$$

که Q بار الکتریکی درون حجم V و $\sigma(x, y)$ چگالی بار سطحی در مرز است.

$$\int_A da\, D_3\left(x, y, 0^+\right) - \int_A da\, D_3\left(x, y, 0^-\right) = \int da\, \sigma(x, y).$$

در حد $R \to 0$ قضیه‌ی مقدار میانگین حکم می‌کند که

$$D_3\left(x_0, y_0, 0^+\right) - D_3\left(x_0, y_0, 0^-\right) = \sigma(x_0, y_0).$$

پی‌وستهگی مئلفه‌های مماسی $\vec{E}$ و $\vec{H}$

حلقه‌ای به شکل مستطیل را به طول $2L$ و عرض 2ℓ به سطح مقطع A در نظر بگیرید، جوری که دو ضلع دراز در $z = \pm\ell$ بنشینند. برای ساده‌گی فرض کنید مستطیل در صفحه‌ای موازی صفحه‌ی (x, z) نشسته است و ضلع‌های دراز مستطیل موازی محور یکم اند. مسیر انتگرال‌گیری C را روی محیط مستطیل جوری تعریف می‌کنیم که روی ضلع بالایی در راستای مثبت محور x حرکت کنیم. از قاعده‌ی دست راست می‌بینیم که $\hat{e}_2$ بردار عمود بر سطح مستطیل است. از ترکیب قضیه‌ی استوکس و قانون القای فارادی می‌بینیم که

$$\frac{d}{dt}\int_A da\, \vec{B} \cdot \hat{e}_2 = -\int_A da\, \nabla \times \vec{E} \cdot \hat{e}_2 = -\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{x}.$$

جمله‌ی سمت چپ در حد $\ell \to 0$ برابر با صفر است. در این حد، سهم ضلع‌های کوتاه در جمله‌ی سمت راست هم صفر

است. پس مجموع انتگرال‌های نظیر دو ضلع دراز، برابر با صفر است:

$$\int dx\, E_1\left(x, y, 0^+\right) - \int dx\, E_1\left(x, y, 0^-\right) = 0.$$

فرض کنید (x_0, y_0) تصویر نقطه‌ی میانیِ ضلع‌های دراز روی صفحه‌ی (x, y) باشد. در حد $L \rightarrow 0$، از قضیه‌ی مقدار میانگین می‌خوانیم

$$E_1\left(x_0, y_0, 0^-\right) = E_1\left(x_0, y_0, 0^+\right).$$

چون در توصیف مرز دو ناحیه، انتخاب محورهای x و y دل‌خواه است نتیجه می‌گیریم که مئلفه‌ی مماسی $\vec{E}$ در هر نقطه‌ی دلخواهی روی مرز، پی‌وسته است. برای تایید این ادعا رابطه‌ی بالا را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\hat{e}_1 \cdot \left[\vec{E}\left(x_0, y_0, 0^+\right) - \vec{E}\left(x_0, y_0, 0^-\right)\right] = 0.$$

با تکرار محاسبه در دست‌گاه مختصه‌های $\left(\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}_3\right)$ که با دورانی به گرد محور سوم به دست می‌آید در می‌یابیم که

$$\hat{e}'_1 \cdot \left[\vec{E}\left(x'_0, y'_0, 0^+\right) - \vec{E}\left(x'_0, y'_0, 0^-\right)\right] = 0.$$

چون میزان دوران دل‌خواه است، باید هر دو مئلفه‌ی مماسی میدان الکتریکی در مرز پی‌وسته باشد. این نتیجه را می‌توانیم به صورت زیر هم بیان کنیم.

$$\hat{e}_3 \times \vec{E}\left(x_0, y_0, 0^-\right) = \hat{e}_3 \times \vec{E}\left(x_0, y_0, 0^+\right).$$

با استدلال مشابه، از ترکیب قضیه‌ی استوکس و (تعمیم) قانون آمپر درمی‌یابیم که مئلفه‌ی مماسی $\vec{H}$ در هر نقطه‌ی دلخواهی روی مرز، پی‌وسته است.

یادداشت

اگر چگالی جریان الکتریکی سطحی در مرز دو ناحیه ناصفر باشد آن‌گاه

$$\lim_{\ell\to 0} \int_V da\, \nabla \times \vec{H} \cdot \hat{e}_2 = \lim_{\ell\to 0} I_A = \int dx\, \vec{j}(x, y) \cdot \hat{e}_2,$$

که I_A جریان الکتریکی درون حجم V، $\vec{j}(x, y)$ چگالی جریان سطحی در مرز است.

$$\int dx\, H_1\left(x, y, 0^+\right) - \int dx\, H_1\left(x, y, 0^-\right) = \int dx\, j_2(x, y).$$

پس با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین در حد $L \to 0$ درمی‌یابیم که

$$H_1\left(x, y, 0^+\right) - H_1\left(x, y, 0^-\right) = j_2(x, y).$$

چون انتخاب محورهای x و y دل‌خواه است نتیجه می‌گیریم که

$$\hat{e}_3 \times \vec{H}\left(x_0, y_0, 0^+\right) - \hat{e}_3 \times \vec{H}\left(x_0, y_0, 0^-\right) = \vec{j}(x_0, y_0).$$

پاسخ‌های تک‌فام

معادله‌های ماکسول، در محیطی تهی از بارها و جریان‌های الکتریکی به این صورت اند.

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \vec{0},$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \qquad \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \vec{0}.$$

در این بخش این معادله‌ها را برای پاسخی با بسته‌گی زمانی هم‌آهنگ[11] بازنویسی می‌کنیم.

[11] Harmonic time dependence

در آغاز توجه می‌کنیم که این معادله‌ها خطی اند یعنی اگر میدان‌های $\left(\vec{E}_1, \vec{D}_1, \vec{B}_1, \vec{H}_1\right)$ و $\left(\vec{E}_2, \vec{D}_2, \vec{B}_2, \vec{H}_2\right)$ دو پاسخ باشند و $a, b \in \mathbb{C}$ هم دو عدد دل‌خواه، آن‌گاه

$$\left(a\vec{E}_1 + b\vec{E}_2, a\vec{D}_1 + b\vec{D}_2, a\vec{B}_1 + b\vec{B}_2, a\vec{H}_1 + b\vec{H}_2\right)$$

پاسخ دیگری است. پس برای حل معادله‌های ماکسول، ضروری نیست که بپنداریم میدان‌ها، تابع‌هایی حقیقی از فضا و زمان اند. پاسخ تک‌فام، پاسخی است که در آن، بسته‌گی زمانی میدان‌ها به صورت $e^{-i\omega t}$ است. بسامد ω عددی حقیقی است. پس

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = -i\omega\vec{B}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = -i\omega\vec{D}.$$

یادآوری

فرض کنید ϕ و ψ عددهای حقیقی اند. آن‌گاه

$$e^{i\phi} := \cos\phi + i\sin\phi, \qquad e^{i\phi}e^{i\psi} := e^{i(\phi+\psi)}.$$

از این تعریف می‌بینیم که $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ و در نتیجه

$$i^2 = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^2 = e^{i\pi} = \cos\pi = -1.$$

هم‌چنین می‌آموزیم

$$\cos(\phi + \psi) = \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi,$$

$$\sin(\phi + \psi) = \cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi.$$

***

معادله‌ی ماکسول برای نور تک‌فام به بسامد ω در محیطی تهی از بارها و جریان‌های الکتریکی به این صورت است.

$$\nabla\cdot\vec{D}(\vec{x},\omega) = 0, \qquad \nabla\times\vec{E}(\vec{x},\omega) - i\omega\vec{B}(\vec{x},\omega) = \vec{0},$$

$$\nabla\cdot\vec{B}(\vec{x},\omega) = 0, \qquad \nabla\times\vec{H}(\vec{x},\omega) + i\omega\vec{D}(\vec{x},\omega) = \vec{0}.$$

در این معادله‌ها همه‌ی میدان‌ها تابع‌هایی مختلط اند. در ادامه می‌پنداریم که محیط، خطی، هم‌گن و هم‌سان‌گرد است. پس

$$\vec{D}(\vec{x},\omega) = \epsilon(\omega)\,\vec{E}(\vec{x},\omega), \quad \vec{B}(\vec{x},\omega) = \mu(\omega)\,\vec{E}(\vec{x},\omega),$$

که $\epsilon(\omega)$ و $\mu(\omega)$ دو تابع مختلط اند. این دو تابع پاشنده‌گی[12] محیط را نماینده‌گی می‌کنند.

[12] dispersion.

موج تخت

چون معادله‌های ماکسول خطی اند، می‌توانیم پاسخ آن‌ها را به صورت ترکیبی خطی از موج‌های تخت بنویسیم. هر موج تخت، با میدان الکتریکی آن معرفی می‌شود.

$$\vec{E}(\vec{x}, \omega) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}.$$

$\vec{E}_0$ دامنه‌ی میدان الکتریکی است که تابعی مختلط از بردار موج $\vec{k}$ است. از (تعمیم) قانون گوس پیدا است که

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0.$$

از معادله‌ی القای فارادی معلوم می‌شود که

$$\vec{B}(\vec{x}, \omega) = \vec{B}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}, \qquad \vec{B}_0 := \omega^{-1}\vec{k}\times\vec{E}_0.$$

با جای‌گذاری در (تعمیم) قانون آمپر درمی‌یابیم که

$$\vec{k}\cdot\vec{k} = \mu(\omega)\epsilon(\omega)\omega^2.$$

ضریب شکست محیط با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود.

$$n := c\sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)}, \quad c := \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}.$$

اگر بخش‌های حقیقی و موهومی ضریب شکست و بردار موج را با اندیس‌های r و i نشان دهیم[13]، می‌بینیم که

$$\vec{k}_r \cdot \vec{k}_r - \vec{k}_i \cdot \vec{k}_i = \left(n_r^{\ 2} - n_i^{\ 2}\right)\frac{\omega^2}{c^2}, \quad \vec{k}_r \cdot \vec{k}_i = n_r n_i \frac{\omega^2}{c^2}.$$

در محیط‌هایی که ضریب شکست حقیقی است، $\vec{k}_r \cdot \vec{k}_i = 0$. یعنی دامنه‌ی موج در جهت عمود بر راستای انتشار آن، که با بخش حقیقی بردار موج تعیین می‌شود، به صورت نمایی افزایش می‌یابد مگر آن که بخش موهومی بردار موج صفر باشد. برای تایید این ادعا توجه کنید که

$$\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} = \left(\vec{E}_0 e^{-\vec{k}_i\cdot\vec{x}}\right) e^{i(\vec{k}_r\cdot\vec{x} - \omega t)}.$$

---

[13] رایج است که ثابت‌های اپتیکی، یعنی بخش‌های حقیقی و موهومی ضریب شکست را با n و k نشان دهند. ما برای پرهیز از خطای ناشی از مشابهت در نام‌گذاری، از این نمادها استفاده نمی‌کنیم.

بازتاب و شکست

در این بخش چیدمانی را در نظر می‌گیریم که در آن، از سمت چپ محور سوم، موج تختی از دوردست به مرز می‌تابد، بخشی از آن بازتابیده می‌شود و بخشی می‌گذرد. نیم‌فضای $z < 0$ را ناحیه‌ی ۱ و نیم‌فضای $z > 0$ را ناحیه‌ی ۲ می‌نامیم. فرض می‌کنیم که ضریب شکست ناحیه‌ی ۱، که با n_1 نشان می‌دهیم، کمیتی حقیقی و مثبت است.

فرض می‌کنیم میدان الکتریکی در ناحیه‌ی ۱ از ترکیب خطی موج تابیده‌ی[14] $\vec{E}(\vec{x}, \omega)$ و موج بازتابیده‌ی[15] $\vec{E}''(\vec{x}, \omega)$ تشکیل شده است.

$$\vec{E}(\vec{x}, \omega) = \vec{E}_0\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}, \qquad \vec{E}''(\vec{x}, \omega) = \vec{E}_0''\, e^{i\vec{k}''\cdot\vec{x} - i\omega t},$$

که هر دو بردار موج $\vec{k}$ و $\vec{k}''$ حقیقی اند،

$$|\vec{k}| = |\vec{k}''| = \frac{n_1 \omega}{c},$$

و

$$\vec{k} \cdot \hat{e}_3 > 0, \qquad \vec{k}'' \cdot \hat{e}_3 < 0.$$

[14] Incident wave
[15] Reflected wave

این درخواست‌ها به این معنا است که موج تابیده در جهت مثبت محور z و موج بازتابیده در جهت منفی آن محور در حرکت است. میدان الکتریکی در ناحیه‌ی ۲ را هم با موجی گذرکرده (شکسته[16]) توصیف می‌کنیم.

$$\vec{E}'(\vec{x},\omega) = \vec{E}_0{}'\, e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}-i\omega t}.$$

شاید عدد موج در ناحیه‌ی ۲ مختلط باشد. چون این موج باید در راستای مثبت محور z حرکت کند، درخواست می‌کنیم

$$\vec{k}'_r\cdot\hat{e}_3 > 0.$$

آیا چنین ترکیبی از موج‌های تابیده، بازتابیده و گذرکرده پاسخی از معادله‌های ماکسول است؟ پاسخ این پرسش در شرط‌های مرزی نهفته است.

صفحه‌ی تابش، زاویه‌ی بازتاب و شکست

در این بخش با بررسی شرط‌های مرزی نشان می‌دهیم پرتوهای بازتابیده و شکسته، بر صفحه‌ی تابش می‌نشینند و

[16] Refracted wave

زاویه‌ی بازتاب با زاویه‌ی تابش برابر است. قانون اسنل را هم برای محاسبه‌ی زاویه‌ی شکست به دست می‌آوریم.

هر نوعی از شرط مرزی، رابطه‌ای خطی بین مئلفه‌های میدان الکتریکی در ناحیه‌ی ۱ و ۲ بر روی مرز است.

$$\epsilon_1 \hat{e}_3 \cdot \left(\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}} + \vec{E}_0'' e^{i\vec{k}''\cdot\vec{\rho}}\right) = \epsilon_2 \hat{e}_3 \cdot \vec{E}_0' e^{i\vec{k}'\cdot\vec{\rho}},$$

$$\hat{e}_3 \times \left(\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}} + \vec{E}_0'' e^{i\vec{k}''\cdot\vec{\rho}}\right) = \hat{e}_3 \times \vec{E}_0' e^{i\vec{k}'\cdot\vec{\rho}},$$

که $\vec{\rho}$ برداری دل‌خواه در صفحه‌ی (x, y)است. پس

$$\vec{k} \cdot \vec{\rho} = \vec{k}' \cdot \vec{\rho} = \vec{k}'' \cdot \vec{\rho}.$$

از آن‌جا که برای هر بردار موج $\vec{K} \in \{\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}''\}$

$$\vec{K} \cdot \vec{\rho} = K^{\perp} \cdot \vec{\rho}, \qquad K^{\perp} := \sum_{j=1}^{2} \left(\vec{K} \cdot \hat{e}_j\right) \hat{e}_j,$$

نتیجه می‌گیریم که

$$k^{\perp} = k''^{\perp} = k'^{\perp}_r, \qquad k'^{\perp}_i = 0.$$

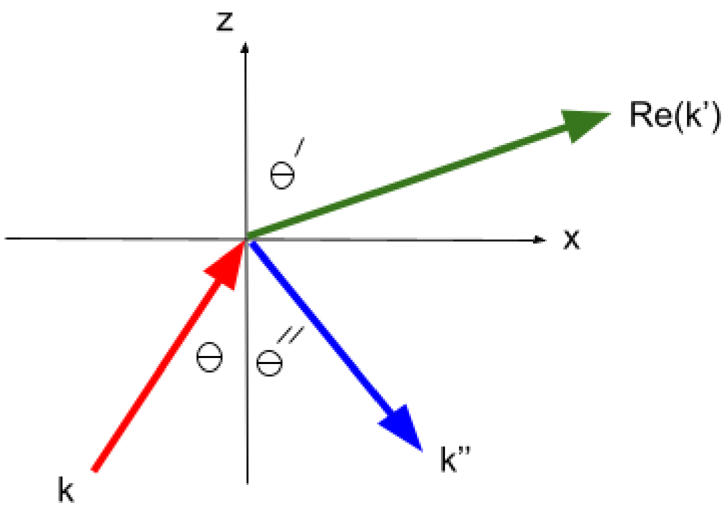
یادآوری

$$\vec{k}'_r := Re(\vec{k}'), \qquad \vec{k}'_i := Im(\vec{k}').$$

پس $\vec{k}$، $\vec{k}'$ و $\vec{k}''$ در یک صفحه نشسته اند. این صفحه که شامل $\vec{k}$ و $\hat{e}_3$ است، صفحه‌ی تابش[17] نامیده می‌شود.

از این پس، صفحه‌ی تابش را منطبق بر صفحه‌ی (x, z) می‌گیریم و با انتخاب مناسب محور یکم فرض می‌کنیم

$$\vec{k} \cdot \hat{e}_1 > 0.$$



از تساوی $k^{\perp} = k''^{\perp}$ درمی‌یابیم که زاویه‌ی تابش θ و زاویه‌ی بازتابش θ'' با هم برابر اند چرا که

$$k^{\perp} = \frac{n_1 \omega}{c} \sin\theta\, \hat{e}_1, \qquad k''^{\perp} = \frac{n_1 \omega}{c} \sin\theta''\, \hat{e}_1.$$

[17] Plane of incidence

از این پس، فرض می‌کنیم که ضریب شکست محیط ۲ هم عددی حقیقی و مثبت است و مسئله را در دو وضعیت متفاوت بررسی می‌کنیم.

1. $n_2 > n_1$

در چنین چیدمانی، تساوی $k^{\perp} = k_r'^{\perp}$ هم‌ارز قانون اسنل برای زاویه‌ی تابش θ و زاویه‌ی شکست θ' است چرا که

$$k_r'^{\perp} = \frac{n_2\omega}{c}\sin\theta' \, \hat{e}_1.$$

پس $n_1 \sin\theta = n_2 \sin\theta'$. در نتیجه

$$\sin\theta' = \frac{n_1}{n_2} \sin\theta < 1,$$

و $\vec{k}'_r \cdot \hat{e}_3 \neq 0$. چون $\vec{k}'_i = k'_i \hat{e}_3$ و $\vec{k}'_r \cdot \vec{k}'_i = 0$ درمی‌یابیم که $k'_i = 0$.

2. $n_2 < n_1$. اگر زاویه‌ی تابش از مقدار حدی

$$\theta_c := \arcsin\frac{n_2}{n_1},$$

کوچک‌تر باشد، قانون اسنل برقرار است و $k'_i = 0$. اگر $\theta \geq \theta_c$ آن‌گاه $\theta' = \frac{\pi}{2}$، $\vec{k'}_r \cdot \hat{e}_3 = 0$ و $\vec{k'} = k_r'^{\perp}$. از شرط مرزی می‌دانیم که

$$k_r'^{\perp} = k^{\perp} = \frac{n_1\omega}{c}\sin\theta\,\hat{e}_1.$$

چون

$$\vec{k'}_r \cdot \vec{k'}_r - \vec{k'}_i \cdot \vec{k'}_i = \frac{\omega^2 n_2^2}{c^2},$$

نتیجه می‌گیریم

$$k'_i = \sqrt{\vec{k'}_r \cdot \vec{k'}_r - n_2^2\frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{n_1^2\sin^2\theta - n_2^2},$$

و

$$\vec{E'}(\vec{x},\omega) = \vec{E}_0'\,e^{-k'_i z}e^{i\frac{\omega}{c}(n_1\sin\theta\,x - ct)}.$$

قطبش، ضریب بازتاب و ضریب گذر

در این بخش، قطبش‌های عمود و موازی با صفحه‌ی تابش را معرفی می‌کنیم و ضریب‌های بازتاب و گذر را نظیر هر قطبش محاسبه می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\vec{k'}$ برداری حقیقی است.

شرط مرزی روی مئلفه‌های میدان الکتریکی در مرز ناحیه‌ی ۱ و ۲ نشان می‌دهد که

$$\epsilon_1 \hat{e}_3 \cdot \left(\vec{E}_0 + \vec{E}_0''\right) = \epsilon_2 \hat{e}_3 \cdot \vec{E}_0',$$

$$\hat{e}_3 \times \left(\vec{E}_0 + \vec{E}_0''\right) = \hat{e}_3 \times \vec{E}_0'.$$

از شرط مرزی روی مئلفه‌های میدان مغناطیسی هم درمی‌یابیم که

$$\hat{e}_3 \cdot \left(\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}_0''\right) = \hat{e}_3 \cdot \vec{k}' \times \vec{E}_0',$$

$$\frac{1}{\mu_1}\hat{e}_3 \times \left(\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}_0''\right) = \frac{1}{\mu_2}\hat{e}_3 \times \left(\vec{k}' \times \vec{E}_0'\right).$$

بردار قطبش عمودی $\hat{s} := \hat{e}_2$ و بردارهای قطبش موازی را تعریف می‌کنیم.

$$\hat{p} := \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \hat{s}, \qquad \hat{p}' := \frac{\vec{k}'}{|\vec{k}'|} \times \hat{s}, \qquad \hat{p}'' := \frac{\vec{k}''}{|\vec{k}|} \times \hat{s}.$$

چون

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \qquad \vec{k}' \cdot \vec{E}'_0 = 0, \qquad \vec{k}'' \cdot \vec{E}_0'' = 0,$$

نتیجه می‌گیریم که هر کدام از این میدان‌های الکتریکی مئلفه‌ای عمودی و مئلفه‌ای موازی دارند.

$$\vec{E}_0 = E_s\hat{s} + E_p\hat{p}, \qquad \vec{E}_0' = E'_s\hat{s} + E'_p\hat{p}',$$
$$\vec{E}_0'' = E''_s\hat{s} + E''_p\hat{p}''.$$

با جای‌گذاری در شرط‌های مرزی درمی‌یابیم که

$$E_s + E''_s = E'_s, \qquad \left(E_s - E''_s\right)\cos\theta = \alpha E'_p\cos\theta',$$
$$E_p + E''_p = \alpha E'_p, \qquad \left(E_p - E''_p\right)\cos\theta = E'_p\cos\theta',$$

که

$$\alpha := \sqrt{\frac{\mu_1\epsilon_2}{\mu_2\epsilon_1}}.$$

در بخش تمرین‌ها، ضریب‌های فرینل[18] که نسبت دامنه‌ی میدان الکتریکی بازتابیده به دامنه‌ی میدان الکتریکی تابیده و نسبت دامنه‌ی میدان الکتریکی گذرکرده به دامنه‌ی میدان الکتریکی تابیده را برای هر دو قطبش به دست می‌دهد حساب می‌کنیم.

[18] Fresnel coefficients

برای محاسبه‌ی ضریب بازتاب و ضریب گذر باید بدانیم که موج بازتابیده و موج گذر کرده، چه کسری از جریان انرژی تابیده را حمل می‌کنند. پس باید بردار پوینتینگ را در هر دو ناحیه حساب کنیم. از قضیه‌ی پوینتینگ می‌دانیم که بردار پوینتینگ در هر ناحیه‌ای با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$\vec{S} = \vec{E}_r \times \vec{H}_r.$$

در این رابطه، n ضریب شکست محیط و اندیس r نماینده‌ی بخش حقیقی میدان است. برای محاسبه‌ی انرژی حمل شده، مئلفه‌ی عمود بر مرز ِ «میانگین زمانی $\vec{S}$» را حساب می‌کنیم که با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود.

$$< \hat{e}_3 \cdot \vec{S} >: = \frac{\omega}{2\pi} \hat{e}_3 \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \vec{S}.$$

در ناحیه‌ی ۲، کار آسان است چون فقط یک موج تخت در آن ناحیه منتشر می‌شود.

$$\vec{E}'(\vec{x}, \omega) = \vec{E}_0' e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}-i\omega t},$$

$$\vec{H}'(\vec{x}, \omega) = \vec{H}_0' e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}-i\omega t} = \frac{n_2}{c\mu_2}\vec{k}' \times \vec{E}_0' e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}-i\omega t}.$$

دامنه‌های $\vec{E}_0'$ و $\vec{H}_0'$ را بر حسب مئلفه‌های آن در راستای دو بردار قطبش می‌نویسیم و چون هر مئلفه عددی مختلط است، آن را در نمایش قطبی بر حسب اندازه و فاز می‌نویسیم.

$$\vec{E}_0' = |E'_s| e^{i\phi'_s} \hat{s} + |E'_p| e^{i\phi'_p} \hat{p}',$$

$$\vec{H}_0' = \frac{n_2}{c\mu_2}\left(|E'_s| e^{i\phi'_s} \hat{p}' - |E'_p| e^{i\phi'_p} \hat{s}\right).$$

پس بخش حقیقی میدان الکتریکی با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$\begin{aligned}\vec{E}'_r := & Re\left[\vec{E}'(\vec{x}, \omega)\right] \\ & = |E'_s| \cos(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega t + \phi'_s)\, \hat{s} \\ & + |E'_p| \cos(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega t + \phi'_p)\, \hat{p}'.\end{aligned}$$

بخش حقیقی میدان $\vec{H}$ هم به همین صورت به دست می‌آید. پس جریان انرژی که به ناحیه‌ی ۲ گذر کرده است با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$< \hat{e}_3 \cdot \vec{S}' >= \frac{n_2}{2c\mu_2}\left(|E'_s|^2 + |E'_p|^2\right) \cos\theta'.$$

قضیه

فرض کنید $f(t) = f_0 e^{-i\omega t}$ و $g(t) = g_0 e^{-i\omega t}$. آن‌گاه

$$< f_r g_r >= \frac{1}{2} Re\left(f g^*\right).$$

اثبات.

فرض کنیم که $f_0 = |f_0| e^{i\phi_f}$ و $g_0 = |g_0| e^{i\phi_g}$. پس

$$< f_r g_r >= \frac{1}{2} |f_0||g_0| \cos(\phi_f - \phi_g)$$

$$= \frac{1}{2} Re\left(f_0 g_0\right) = \frac{1}{2} Re\left(f g^*\right). \qquad ■$$

پس برای محاسبه‌ی میانگین زمانی $\vec{S}'$ می‌توانستیم از این قضیه استفاده کنیم:

$$< \vec{S}' >= \frac{1}{2} Re\left(\vec{E}'(\vec{x}, \omega) \times \vec{H}'(\vec{x}, \omega)^* \right)$$

$$= \frac{1}{2} Re\left(\vec{E}'_0 \times \vec{H}'_0{}^* \right)$$

$$= \frac{n_2}{2c\mu_2}\left(|E'_s|^2 + |E'_p|^2\right)\frac{\vec{k}'}{|\vec{k}'|}.$$

در ناحیه‌ی ۱ میدان‌ها با رابطه‌های زیر داده می‌شود.

$$\vec{E}_1 := \vec{E}(\vec{x}, \omega) + \vec{E}''(\vec{x}, \omega),$$

$$\vec{H}_1 := \vec{H}(\vec{x}, \omega) + \vec{H}''(\vec{x}, \omega),$$

$$\vec{H}(\vec{x}, \omega) := \frac{n_1}{c\mu_1}\vec{k} \times \vec{E}(\vec{x}, \omega),$$

$$\vec{H}''(\vec{x}, \omega) := \frac{n_1}{c\mu_1}\vec{k}'' \times \vec{E}''(\vec{x}, \omega).$$

پس بردار پوینتینگ در ناحیه‌ی ۱ از جمع سه جمله به دست می‌آید: $\vec{S}$ که نظیر موج تابیده است، $\vec{S}''$ که نظیر موج بازتابیده است و $\vec{S}_c$ که محصول اختلاط این موج‌ها در ناحیه‌ی ۱ است.

$$\vec{S}_1 = \vec{S} + \vec{S}'' + \vec{S}_c$$

$$< \vec{S} >= Re\left[\vec{E}(\vec{x}, \omega) \times \vec{H}(\vec{x}, \omega)^*\right]$$

$$= \frac{n_1}{2c\mu_1}\left(|E_s|^2 + |E_p|^2\right) \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|},$$

$$< \vec{S}'' >= Re\left[\vec{E}''(\vec{x}, \omega) \times \vec{H}''(\vec{x}, \omega)^*\right]$$

$$= \frac{n_1}{2c\mu_1}\left(|E_s''|^2 + |E_p''|^2\right) \frac{\vec{k}''}{|\vec{k}|},$$

$$< \vec{S}_c >= Re\left[\vec{E}(\vec{x}, \omega)^* \times \vec{H}''(\vec{x}, \omega)\right]$$

$$+\ Re\left[\vec{E}''(\vec{x},\omega)\ \times\ \vec{H}(\vec{x},\omega)^{*}\right].$$

به کمک دو کمیت زیر

$$\vec{K}_{\pm} := \vec{k}''\ \pm\ \vec{k}, \qquad \eta := \frac{n_1}{2c\mu_1|\vec{k}|},$$

و با توجه به این که

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = \vec{k}''\ \cdot\ \vec{E}''_0\ =\ 0,$$

می‌بینیم که

$$<\vec{S}_c>=\ \eta Re\left[\left(\vec{E}_0^{\ *}\ \cdot\ \vec{E}_0''\right)\vec{K}_+\right]$$

$$+\ \eta Re\left[\left(\vec{E}_0^{\ *}\ \cdot\ \vec{K}_-\right)\vec{E}_0''\ -\ \left(\vec{K}_-\ \cdot\ \vec{E}_0''\right)\vec{E}_0^{\ *}\right].$$

برای ما محاسبه‌ی $<\hat{e}_3\cdot\vec{S}_1>$ مهم است. با توجه به تساوی‌های زیر

$$\hat{e}_3\cdot\vec{K}_+\ =\ 0, \qquad \vec{K}_-\ =\ 2\left(\hat{e}_3\ \cdot\ \vec{k}\right)\hat{e}_3.$$

درمی‌یابیم که $<\hat{e}_3\cdot\vec{S}_c>=\ 0$. پس

$$<\hat{e}_3\cdot\vec{S}_1>=<\hat{e}_3\cdot\vec{S}>+<\hat{e}_3\cdot\vec{S}''>.$$

پس در ناحیه‌ی ۱، جریان انرژی در راستای محور سوم تنها از موج تابیده و موج بازتابیده سهم می‌گیرد و جمله‌ی اختلاطی سهمی در آن ندارد. این نتیجه، تعریف ضریب بازتاب و ضریب گذر را توجیه می‌کند.

$$R := \frac{\langle \hat{e}_3 \cdot \vec{S}'' \rangle}{\langle \hat{e}_3 \cdot \vec{S} \rangle}, \qquad T := \frac{\langle \hat{e}_3 \cdot \vec{S}' \rangle}{\langle \hat{e}_3 \cdot \vec{S} \rangle}.$$

تمرین

1. ضریب‌های فرینل برای هر دو قطبش عمودی و موازی را حساب کنید.
2. ضریب‌های بازتاب و گذر را بر حسب ضریب‌های فرینل بنویسید.
3. جمع ضریب‌های بازتاب و گذر را حساب کنید.
4. ضریب‌های فرینل و ضریب‌های بازتاب و گذر را در تابش عمودی حساب کنید.
5. در چه زاویه‌یِ تابشی، ضریبِ بازتاب صفر است؟ ارتباط پاسخ با تعریف زاویه‌ی بروستر[19] چیست؟
6. فرض کنید $n_1 < n_2$. ضریب‌های فرینل و ضریب‌های بازتاب و گذر را در $\theta \to \theta_c^-$ حساب کنید. θ زاویه‌ی تابش است و $\theta_c := \arcsin \frac{n_2}{n_1}$.
7. فرض کنید $n_2 < n_1$. ضریب‌های فرینل و ضریب‌های بازتاب و گذر را در $\theta \to \frac{\pi}{2}$ حساب کنید. θ زاویه‌ی تابش است.

[19] Brewster's angle