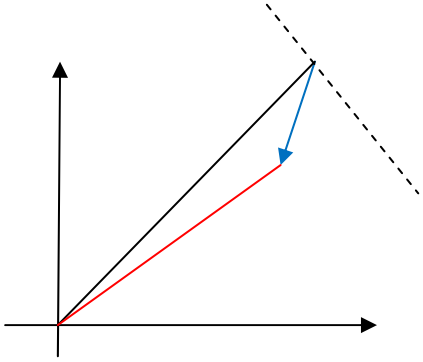
Problem 2.21:[1] A stellar object at some known large distance ejects a 'jet' at speed v towards an observer obliquely, making an angle θ with the line of sight. To the observer the jet appears to be ejected sideways at speed V. Prove $V = c\sin\theta\left(\frac{c}{v} - \cos\theta\right)^{-1}$, and show that this can exceed c, for example, when $\theta = 45°$. [Indeed, such apparently superluminal jets once had observers worried—briefly.]



پاسخ: در این شکل، پیکان آبی، جابه‌جایی پرتابه در بازه‌ی زمانی $\Delta t := t_2 - t_1$ را نشان می‌دهد. فرض کنید فاصله‌ی ستاره با نقطه‌ی مشاهده (واقع در مبدء مختصه‌ها) L باشد که با خط سیاه‌رنگ نشان داده‌ام. زاویه‌ی بین پیکان آبی و خط سیاه‌رنگ θ است. نوری که در لحظه‌ی پرتاب (t_1) از پرتابه (ته پیکان آبی) می‌درخشد، در لحظه‌ی $T_1 = \frac{L}{c} + t_1$ به مبدء می‌رسد. نوری که پس از گذشتن زمان Δt یعنی در لحظه‌ی t_2 از پرتابه (نوک پیکان آبی) می‌درخشد در لحظه‌ی $T_2 = \frac{L'}{c} + t_2$ به مبدء می‌رسد. L' طول خط سرخ‌رنگ است:

$$L' = \sqrt{L^2 + v^2\Delta t^2 - 2Lv\Delta t\cos\theta} \simeq L - v\Delta t\cos\theta.$$

در این محاسبه فرض کرده‌ایم $v\Delta t \ll L$. چون در پایان محاسبه، حد $\Delta t \to 0$ را به حساب می‌آوریم، این فرض به‌جا ست. پس

$$\Delta T := T_2 - T_1 \simeq \Delta t\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right).$$

[1] Wolfgang Rindler, "Relativity," Oxford University Press, second edition (2006).

مولفه‌ی پیکان آبی رنگ در راستای خطچین (عمود به خط دید) عبارت است از

$$\Delta\ell = v\Delta t \sin\theta.$$

پس سرعت ظاهری پرتابه از نگاه کسی که از مبدا مختصه‌ها به آن نگاه می‌کند چنین است:

$$V(\theta) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\ell}{\Delta T} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v\Delta t\sin\theta}{\Delta t\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)} = \frac{v\sin\theta}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}$$
$$= \frac{c\sin\theta}{\frac{c}{v}-\cos\theta}.$$