درس‌نامه‌ی مکانیک آماری پیشرفته‌ی یک

فرهنگ لران

دانش‌کده‌ی فیزیک، دانش‌گاه صنعتی اصفهان

این درس‌نامه بیش و کم شامل ِ مطالبی است که در درس ِ مکانیک ِ آماری ِ پیشرفته‌ی ِ یک در ترم ِ نخست ِ سال ِ تحصیلی ِ ۸۵–۸۴ ارایه شده است. کتابی که در این کلاس بر اساس ِ آن درس ارایه شده کتاب ِ مکانیک ِ آماری نوشته‌ی ِ پَتریا (Pathria) است. در این درس مکانیک ِ آماری از ابتدا آموزش داده شده است به طوری که تنها پیش‌نیاز ِ آن ترمودینامیک ِ و مکانیک ِ کوانتمی ِ مقدماتی است.

فصل های ِ اول، دوم و سوم به طور ِ کامل تدریس شده‌اند که درس‌نامه‌ی ِ آن‌ها بعداً اضافه می‌شود. محتوای ِ این درس‌نامه در شکل ِ فعلی بر محتوای ِ بخش ِ هشتم ِ فصل ِ ۳، فصل‌های ِ ۴ و ۵، سه بخش ِ اول ِ فصل ِ ٦، دو بخش ِ اول ِ فصل ِ ۷، تمامی ِ فصل ِ ۸، چهار بخش ِ اول ِ فصل ِ ۹ و بخش‌های ۲، ۵، ٦، ۷ و ۸ از فصل ِ ۱۲ ِ کتاب ِ پتریا منطبق است. این درس‌نامه در سال‌های ِ آینده کامل‌تر خواهد شد.

فهرست مندرجات

۱ ۵

۲ ۶

۳ هنگرد کانونیک ۷

۳—۱ آمار مواد پارامغناطیس ۷

۴ هنگرد گراند کانونیک ۹

۵ فرمول‌بندی آمار کوانتمی ۱۲

۵—۱ هنگرد کوانتمی و ماتریس چگالی ۱۲

۵—۲ آمار هنگردهای مختلف ۱۴

۵—۲—۱ هنگرد میکروکانونیک ۱۴

۵—۲—۲ هنگردهای کانونیک و گراند کانونیک ۱۵

۵–۳ ذرات تمییزناپذیر ۱۶

۵–۴ گاز ذره‌ی آزاد در جعبه ۱۷

۵–۴–۱ گاز دو اتمی ۲۰

۶ آمار کوانتمی نظریه‌ی گازهای ساده ۲۱

۶–۱ گاز ایده‌آل در هنگرد میکروکانونیک کوانتمی ۲۱

۶–۲ گاز ایده‌آل در هنگردهای کوانتمی کانونیک و گراند کانونیک ۲۴

۶–۳ آمار عددهای اشغال ۲۶

۷ گاز ایده‌آل بوزونی ۲۹

۷–۱ ترمودینامیک گاز ایده‌آل بوزونی ۲۹

۷–۲ ترمودینامیک تابش جسم سیاه ۳۴

۷–۳ گرمای ویژه‌ی جامدات بلوری ۳۶

۸ گاز ایده‌آل فرمی ۳۹

۸—۱ ترمودینامیک گاز ایده‌آل فرمی ۳۹

۸—۲ رفتار مغناطیسی گاز ایده‌آل فرمی ۴۳
۸—۲—۱ پارامغناطیس پاولی ۴۳
۸—۲—۲ دیامغناطیس لاندائو و اثر دوهاوس—ون‌آلفن ۴۸

۸—۳ گاز الکترونی در فلزات ۵۲
۸—۳—۱ جریان ترمویونیک ۵۲
۸—۳—۲ اثر فوتوالکتریک ۵۵

۸—۴ تعادل آماری کوتوله‌های سفید ۵۶

۸—۵ مدل آماری اتم ۶۰

۹ بسط خوشه‌ای و سهم برهم‌کنش ذرات درآمار گاز کلاسیک ۶۳

۱۰ گذار فاز ۷۱

۱۰—۱ مدل مایر برای چگالش ۷۱

۱۰—۲ مدل آیزینگ ۷۴
۱۰—۲—۱برهم‌کنش تبادلی و مدل هایزنبرگ ۷۵
۱۰—۲—۲مدل آیزینگ ۷۷

۱۰–۳ مدل آیزینگ در تقریب مرتبه‌ی صفر ۷۹

۱۰–۴ مدل آیزینگ در تقریب اول ۸۴

فصل ۱

فصل ۲

فصل ۳

هنگرد کانونیک

۳–۱ آمار مواد پارامغناطیس

دستگاهی شامل N دوقطبی مغناطیسی مشابه μ در میدان خارجی H در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم این دوقطبی‌ها جای‌گزیده و از یکدیگر تمییز پذیرند.

انتظار داریم که در دمای محدود اندازه‌ی مغناطش M تنها تابعی از نسبت $x = \frac{\mu H}{kT}$ باشد. در حد $x \to \infty$ $(T \to ۰)$ تمامی دوقطبی‌ها در راستای میدان منظم می‌شوند و دستگاه کاملاً مغناطیده می‌شود. اما در حد $x \to ۰$ $(T \to \infty)$ در اثر افت و خیزهای گرمایی جهت‌گیری دوقطبی‌ها کاملاً تصادفی است و مغناطش دستگاه صفر است. اگر آرایش دستگاه را با $\{\theta_i\}$ نمایش دهیم که در آن θ_i زاویه‌ی دوقطبی iاُم با راستای H است آن‌گاه انرژی دستگاه با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$E(\{\theta_i\}) = -\sum_{i=۱}^{N} \mu_i.H = -\mu H \sum_{i=۱}^{N} \cos\theta_i. \qquad (۱.۳)$$

در نتیجه تابع پارش $Q_N = Q_۱^N$ که درآن

$$Q_۱ = \sum_{\theta} \exp\left(\beta\mu H \cos\theta\right) = ۴\pi \frac{\sinh(\beta\mu H)}{\beta\mu H}. \qquad (۲.۳)$$

به آسانی می‌شود نشان داد که مغناطش ِمتوسط ِدستگاه که با رابطه‌ی ِ

$$M_z = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \mu \cos\theta_i \right\rangle_{\{\theta_i\}} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \log Q_N, \qquad (۳.۳)$$

داده می‌شود برحسب ِتابع ِلانژوین [1] $L(x)$ به دست می آید:

$$M_z = N\mu L(\beta\mu H), \qquad (۴.۳)$$

$$L(x) = \coth x - \frac{1}{x}. \qquad (۵.۳)$$

از این جا می‌شود قانون ِکوری را به دست آورد:

$$M = \frac{N\mu^2}{3kT} H + \mathcal{O}(x^2) \Rightarrow \xi = \lim_{H\to 0} \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right) \sim \frac{1}{T}. \qquad (۶.۳)$$

برای ِمحاسبه‌ی ِمغناطش به روش ِکوانتمی یک شبکه‌ی ِاسپینی شامل ِN دوقطبی ِمغناطیسی در میدان ِخارجی ِH را در نظر بگیرید. انرژی ِهر دوقطبی می‌تواند $\pm\epsilon$ باشد که $\epsilon = \mu H$. تابع ِپارش ِدستگاه $Q_N = Q_1^N$ است (از برهم‌کنش ِدوقطبی‌ها با یکدیگر چشم‌پوشی می‌کنیم) که:

$$Q_1 = e^{\beta\epsilon} + e^{-\beta\epsilon} = 2\cosh(\beta\epsilon). \qquad (۷.۳)$$

از این جا انرژی ِآزاد ِهلمهولتز $A = -NkT\ln(2\cosh(\beta\epsilon))$ به دست می آید و در نتیجه $(x = \beta\epsilon)$:

$$\begin{aligned}
S &= -\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_H = NK\left(\ln(2x) - x\tanh x\right), \\
U &= A + TS = -N\epsilon\tanh x, \\
M &= -\left(\frac{\partial A}{\partial H}\right)_T = N\mu\tanh x, \\
C &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H = Nkx^2 sech^2 x. \qquad (۸.۳)
\end{aligned}$$

ظرفیت ِگرمایی ِویژه را می‌شود برحسب ِΔ گاف ِانرژی به صورت ِزیر نوشت:

$$C = Nk\left(\frac{\Delta}{kT}\right)^2 e^{\Delta/kT}\left(1 + e^{\Delta/kT}\right)^{-2}. \qquad (۹.۳)$$

[1] Langevin, 1905

فصل ۴

هنگرد گراند کانونیه

هنگرد ِگراند کانونیک برای ِتوصیف ِدستگاهی (S) به کار می‌رود که در حال ِتعادل ِگرمایی با یک منبع ِگرمایی (S') انرژی و ذره مبادله می‌کند. فرض ِاساسی این است که مجموع ِانرژی $E^{(\circ)}$ و تعداد ِکل ِذرات ِدو دستگاه $N^{(\circ)}$ ثابت است:

$$N_r + N'r = N^{(\circ)},$$
$$E_r + E'r = E^{(\circ)}, \qquad (۱.۴)$$

و

$$\frac{N_r}{N^{(\circ)}} \ll ۱$$
$$\frac{E_r}{E^{(\circ)}} \ll ۱. \qquad (۲.۴)$$

r در این جا بیانگر یک حالت ِمجاز است. از فرض ِدوم نتیجه می‌شود که $\Omega(N_r, E_s) \ll \Omega'(N'_r, E'_s)$ و در نتیجه

$$ln\Omega + \ln\Omega' \approx \ln\Omega'(N^{(\circ)} - N_r, E^{(\circ)} - E_s) \approx \ln\Omega'(N^{(\circ)}, E^{(\circ)}) - \alpha N_r - \beta E_s, \qquad (۳.۴)$$

که در این جا

$$\begin{aligned}\alpha &= \left(\frac{\partial \ln \Omega'}{\partial N'}\right)_{N'=N^{(\circ)}},\\ \beta &= \left(\frac{\partial \ln \Omega'}{\partial E'}\right)_{E'=E^{(\circ)}}.\end{aligned} \tag{۴.۴}$$

در نتیجه $P_{r,s}$ احتمال ِوقوع ِحالتی با N_r ذره و انرژی ِE_s با رابطه‌ی ِزیر داده می‌شود:

$$P_{r,s} = \frac{\exp(-\alpha N_r - \beta E_s)}{\sum_{r,s} \exp(-\alpha N_r - \beta E_s)}. \tag{۵.۴}$$

هنگردی شامل ِ$\mathcal{N}$ دستگاه ِمشابه را در نظر بگیرید و فرض کنید با $n_{r,s}$ تعداد اعضای ِاین هنگرد که انرژی ِآن‌ها E_s است و N_r ذره دارد نمایش دهیم. هنگرد ِگراند کانونیک با قیود ِزیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\sum_{r,s} n_{r,s} &= \mathcal{N},\\ \sum_{r,s} n_{r,s} N_r &= \mathcal{N}\bar{N},\\ \sum_{r,s} n_{r,s} E_s &= \mathcal{N}\bar{E},\end{aligned} \tag{۶.۴}$$

که در این جا $\bar{N}$ و $\bar{E}$ مقادیر ِثابتی هستند. اگر $\{n^*_{r,s}\}$ محتمل‌ترین توزیع و $\langle n_{r,s}\rangle$ متوسط ِمقدار ِ$n_{r,s}$ را نشان دهد می‌شود دید که

$$P_{r,s} = \lim_{\mathcal{N}\to\infty} \frac{\langle n_{r,s}\rangle}{\mathcal{N}} = \frac{n^*_{r,s}}{\mathcal{N}}, \tag{۷.۴}$$

که $P_{r,s}$ در رابطه‌ی ِ(۵.۴) داده شده است.

برای ِآن که معنای ِفیزیکی ِکمیتهای ِآماری که در بالا معرفی کردیم روشن شود کمیت ِپتانسیل ِq را تعریف می‌کنیم:

$$q = \ln\left(\sum_{r,s} \exp(-\alpha N_r - \beta E_s)\right). \tag{۸.۴}$$

به سادگی می‌شود دید که

$$d(q + \alpha\bar{N} + \beta\bar{E}) = \beta\left(\frac{\alpha}{\beta} d\bar{N} + d\bar{E} - \frac{۱}{\mathcal{N}} \sum_{r,s} \langle n_{r.s}\rangle\, dE_s\right). \tag{۹.۴}$$

با مقایسه‌ی این رابطه باقانون اول ترمودینامیک $dQ = dE + dW - \mu dN$ نتیجه می‌گیریم که

$$dW = -\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{r,s} \langle n_{r.s} \rangle \, dE_s, \tag{۱۰.۴}$$

و $\mu = \frac{\alpha}{\beta}$

$$d(q + \alpha \bar{N} + \bar{E}) = \beta dQ, \tag{۱۱.۴}$$

که از این جا نتیجه می‌شود که $\beta = 1/kT$ و $q + \alpha \bar{N} + \beta \bar{E} = S/k$. می‌شود نشان داد که k همان ثابت بولتزمان است. از آن جا که $\mu \bar{N}$ همان انرژی آزاد گیبس $G = \bar{E} - TS + PV$ است نتیجه می‌گیریم که:

$$q = \frac{PV}{kT}. \tag{۱۲.۴}$$

$\mathcal{L}$ تابع پارش بزرگ[۱] را بر حسب تابع پارش $Q_{N_r} = \sum_s \exp(-\beta E_s)|_{N_r}$ تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{L} = e^q = \sum_{N_r=0}^{\infty} z^{N_r} Q_{N_r}, \qquad z = e^{\mu/kT}. \tag{۱۳.۴}$$

دیدیم که $P = \frac{kT}{V} \ln \mathcal{L}$. می‌شود نشان داد که $A = \mu N - PV = -kT \ln(z^{-N} \mathcal{L})$ و

$$S = \left(\frac{PV}{T} \right)_{\mu,V} = k \left(\frac{\partial T \ln \mathcal{L}}{\partial T} \right)_{\mu,V}. \tag{۱۴.۴}$$

[۱] Grnad partition function

فصل ۵

فرمول‌بندی آمار کوانتمی

۵–۱ هنگرد کوانتمی و ماتریس چگالی

مجموعه‌ی ِ $\mathcal{N} \to \infty$ دستگاه که دینامیک ِ آن‌ها با هامیلتونی ِ H داده می‌شود یک هنگرد ِ کوانتمی را می‌سازند. در این هنگرد دستگاه ِ k اُم را با مجموعه‌ی ِ ضرایب ِ a_n^k که از روی ِ ψ^k تابع ِ موج ِ آن دستگاه بر حسب ِ یک پایه‌ی ِ کامل ϕ_n با رابطه‌ی ِ به دست می آیند توصیف می‌کنیم:

$$\psi^k = \sum_n n^k \phi_n \Rightarrow a_n^k = \int \phi_n^* \psi^k, \tag{۱.۵}$$

از معادله‌ی ِ شرودینگر می‌شود دید که:

$$i\hbar \dot{a}_n^k = \sum_{nm} H_{nm} a_m^k, \qquad H_{nm} = \int \phi_n^* H \phi_m. \tag{۲.۵}$$

ماتریس ِ چگالی ِ ρ را با رابطه‌ی ِ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho_{mn}(t) = \frac{۱}{\mathcal{N}} \sum_{k=۱}^{\mathcal{N}} a_m^k a_n^{k*}, \tag{۳.۵}$$

و میانگین ِآماری ِکمیتی چون G را با رابطه‌ی ِزیر می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\langle G\rangle &= \frac{1}{\mathcal{N}}\sum_{k=1}^{\mathcal{N}}\int \psi^* G\psi^k \\ &= Tr(\rho G). \end{aligned} \qquad (۴.۵)$$

از آن جاکه،

$$Tr\rho = \sum_n \rho_{nn} = \frac{1}{\mathcal{N}}\sum_{k=1}^{\mathcal{N}}\left(\sum_n |a_n|^2\right) = 1, \qquad (۵.۵)$$

رابطه‌ی ِ(۴.۵) را می‌شود به صورت ِزیر نوشت:

$$\langle G\rangle = \frac{Tr\rho G}{Tr\rho}. \qquad (۶.۵)$$

از معادله‌ی ِ(۲.۵) دیده می‌شود که

$$i\hbar\dot{\rho} + [\rho, H] = 0. \qquad (۷.۵)$$

این را می‌توان به عنوان ِصورت‌بندی ِکوانتمی ِقضیه‌ی ِلیوویل در ابتدای ِفصل ِدوم گرفت. دستگاه ِایستا یا در حال ِتعادل را با شرط ِ$\dot{\rho} = 0$ مشخص می‌کنیم. از معادله‌ی ِبالا می‌شود دید که در مورد ِچنین دستگاه‌هایی $\rho = \rho(H)$. اگر ϕ_n ها در معادله‌ی ِ(۱.۵) ویژه توابع ِH باشند (نمایش ِانرژی) آن گاه ماتریس ِچگالی قطری خواهد بود:

$$\rho_{nm} = \rho_n \delta_{nm}. \qquad (۸.۵)$$

در نتیجه می‌شود ماتریس ِچگالی را به این صورت نوشت:

$$\rho = \sum_n |n\rangle \rho_n \langle n|. \qquad (۹.۵)$$

۵–۲ آمار هنگردهای مختلف

۵–۲–۱ هنگرد میکروکانونیک

هنگردِ میکروکانونیک با کمکِ رابطه‌یِ (۸.۵) با این شرط داده می‌شود که

$$\rho = \begin{cases} ۱/\Gamma & \text{برای هر حالت در دسترس} \\ ۰ & \text{برای حالات دیگر} \end{cases} . \qquad (۱۰.۵)$$

آن چه در این تعریف پوشیده است این است که

۱) در هنگردِ میکروکانونیک انرژی ثابت است.

۲) احتمالِ رویدادنِ همه‌یِ حالاتی که انرژیِ آن ها برابر است، یکی است.

حالتِ سره[۱] حالتی است که در آن تمامِ اعضایِ هنگرد در یک حالتِ یکسان باشند یعنی $S = k \ln \Gamma = ۰$. در یک پایه‌یِ دل‌خواه ϕ_n، حالت سره با این شرط داده می‌شود که

$$a_n^k = a_n, \qquad \forall k. \qquad (۱۱.۵)$$

در نتیجه

$$\rho^۲ = \rho. \qquad (۱۲.۵)$$

(تمرین) از شرط (۱۲.۵) می‌شود نتیجه گرفت که در نمایشِ انرژی $\rho_n = \delta_{nm}$. حالتی که در آن $\Gamma > ۱$ را حالتِ آمیخته[۲] می‌نامیم. ماتریسِ چگالی نظیرِ حالتِ آمیخته در نمایشِ انرژی با رابطه‌یِ (۱۰.۵) داده می‌شود. از آن جا که در هر پایه‌یِ دل‌خواهی ρ_{nn} معیاری از رخ‌دادِ حالتِ nاُم است برقراریِ فرضِ برابریِ احتمالِ رویدادِ همه‌یِ حالت‌هایِ در دسترس در هنگردِ میکروکانونیک

[۱] pure state

[۲] mixed state

مستلزم آن است که در هر پایه‌ی دل‌خواهی عناصر قطری نظیر حالات در دسترس با هم برابر باشند. برای تضمین این موضوع لازم است در هنگرد میکروکانونیک فرض تازه‌ای قرار دهیم که نتیجه‌اش این خواهد بود که در هنگرد میکروکانونیک در هر پایه‌ی دل‌خواهی ماتریس چگالی قطری است. برپایه‌ی این فرض که آن را اصل فازهای تصادفی می‌نامیم $a_n^k = ae^{i\theta_n^k}$ که θ_n^k فازهای کاملاً تصادفی هستند. در نتیجه

$$\begin{aligned} \rho_{nm} &= \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} |a|^2 \, e^{i(\theta_m^k - \theta_n^k)} \\ &= c\delta_{nm}. \end{aligned} \qquad (۱۳.۵)$$

۵–۲–۲ هنگردهای کانونیک و گراند کانونیک

در هنگرد کانونیک تابع پارش $Q = Tr(e^{\beta H})$ است و ماتریس چگالی با رابطه‌ی $\rho = Q^{-1} e^{\beta H}$ داده می‌شود. مقدار متوسط کمیتی چون G هم با رابطه‌ی

$$\langle G \rangle = Tr(\rho G) = \frac{Tr(Ge^{-\beta H})}{Tr(e^{-\beta H})}, \qquad (۱۴.۵)$$

داده می‌شود. در هنگرد گراند کانونیک $[\rho, N] = 0$. در واقع

$$\rho = \frac{e^{-\beta(H-\mu N)}}{\mathcal{L}}, \qquad \mathcal{L} = Tr(e^{-\beta(H-\mu N)}). \qquad (۱۵.۵)$$

مقدار متوسط کمیتی چون G هم با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$\langle G \rangle = \frac{Tr(Ge^{-\beta(H-\mu N)})}{\mathcal{L}}, \qquad (۱۶.۵)$$

۵–۳ ذرات تمییزناپذیر

گازی شامل N ذره‌ی تمییزناپذیر را که با یکدیگر برهم‌کنش ندارند در نظر بگیرید. هامیلتونی این دستگاه با

$$\mathcal{H} = \sum_{i=۱}^{N} H_i, \qquad (۱۷.۵)$$

و تابع موج آن با معادله‌ی شرودینگر

$$\mathcal{H}\psi_a = E_a\psi_a, \qquad (۱۸.۵)$$

داده می‌شود. فرض تمییزناپذیری، معنای یکسان بودن را هم در بر دارد. به این خاطر $H_i(p_i, q_i) = H(p_i, q_i)$. پس ویژه‌بردارهای $\mathcal{H}$ را می‌شود برحسب ویژه‌بردارهای H، $H_i u_a(i) = \epsilon_a u_a(i)$ نوشت:

$$\psi_{a_۱,\cdots,a_N}(i_۱, i_۲, \cdots, i_N) = Q\left(u_{a_۱}(i_۱), u_{a_۲}(i_۲), \cdots, u_{a_N}(i_N)\right), \qquad (۱۹.۵)$$

$$E_{a_۱,a_۲,\cdots,a_N} = \sum_{i=۱}^{N} \epsilon_{a_i}. \qquad (۲۰.۵)$$

Q در معادله‌ی (۱۹.۵) به معنای یک چند جمله‌ای است. Q را از شرط تمییزناپذیری می‌شود به دست آورد. فرض کنید P عمل‌گر ترتیب باشد یعنی

$$P\psi_{a_۱,\cdots,a_N}(i_۱, i_۲, \cdots, i_N) = \psi_{a_۱,\cdots,a_N}(i_{P_۱}, i_{P_۲}, \cdots, i_{P_N}). \qquad (۲۱.۵)$$

چون مشاهده‌پذیرها با $|\psi|^۲$ داده می‌شوند تمییرناپذیری ایجاب می‌کند که

$$|P\psi|^۲ = |\psi|^۲. \qquad (۲۲.۵)$$

به علاوه $P^۲ = ۱$. پس از معادله‌ی (۲۲.۵) نتیجه می‌شود که $P\psi = \pm\psi$. پس Q یک چندجمله‌ای متقارن یا پادمتقارن است. تابع موج پادمتقارن را می شود با دترمینان سلاتر(Slater)

نمایش داد:

$$\psi^A_{a_1,\cdots,a_N} = \boxed{const.} \begin{vmatrix} u_{a_1}(1) & u_{a_1}(2) & \cdots & u_{a_1}(N) \\ u_{a_2}(1) & u_{a_2}(2) & \cdots & u_{a_2}(N) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_{a_N}(1) & u_{a_N}(2) & \cdots & u_{a_N}(N) \end{vmatrix} \qquad (۲۳.۵)$$

تابع‌ِموج‌ِ $\psi_{Boltz} = u_{a_1}(1)u_{a_2}(2)\cdots u_{a_N}(N)$ را بُلتزمانیَن می‌نامند. بر حسب‌ِبلتزمانین ψ_A و ψ_S (تابع‌ِموج‌ِمتقارن) را می‌شود به این صورت تعریف کرد:

$$\begin{aligned} \psi^S &= const.\sum_P P\psi_{Boltz}, \\ \psi^A &= const.\sum_P (-1)^{[P]} P\psi_{Boltz}, \end{aligned} \qquad (۲۴.۵)$$

که در آن که بر حسب‌ِ آن که P زوج یا فرد باشد $(-1)^{[P]} = \pm 1$. ψ^S برای‌ِتوصیف‌ِ بوزون‌ها و ψ^A برای‌ِتوصیف‌ِ فرمیون‌ها به کار می‌رود. می‌شود دید که تعریف‌ِ ψ^A با اصل‌ِطرد‌ِپاولی سازگار است:

$$\psi^A_{a_1,\cdots,a_N} = 0, \qquad a_i = a_j. \qquad (۲۵.۵)$$

۵—۴ گاز ذره‌ی آزاد در جعبه

هامیلتونی‌ِگاز‌ِذره‌ی آزاد در جعبه‌ای به حجم‌ِ V با

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar^2}{2m}K^2, \qquad K^2 = \sum_{i=1}^{N} \vec{k}_i^2, \qquad (۲۶.۵)$$

داده می‌شود که در آن $\vec{k} = 2\pi V^{-1/3}\vec{n}$ (مؤلفه‌های‌ِبردار‌ِ $\vec{n}$ اعداد‌ِصحیح‌ِنامنفی هستند). بلتزمانین بر حسب‌ِتابع‌ِموج‌ِبهنجار شده‌ی‌ِتک ذره $u_{\vec{k}}(\vec{r}) = V^{-1/2}\exp\{i\vec{k}.\vec{r}\}$ با رابطه‌ی‌ِ

$$\psi_{Boltz} = u_{\vec{k}_1}(1)u_{\vec{k}_2}(2)\cdots u_{\vec{k}_N}(N), \qquad (۲۷.۵)$$

داده می‌شود که برای ساده‌گی از نماد $u_{\vec{k}_i}(i)$ به جای $u_{\vec{k}_i}(\vec{r}_i)$ استفاده کرده‌ایم. به این ترتیب تابع موج دستگاه با

$$\psi_K(۱,\cdots,N) = (N!)^{-۱/۲} \sum_P \delta_P P \psi_{Boltz}, \qquad (۲۸.۵)$$

داده می‌شود که در آن ضریب $(N!)^{-۱/۲}$ ضریب بهنجارش است. هم‌چنین $\delta_P = (\pm۱)^{[P]}$ است که در آن علامت $+$ برای بوزون‌ها و علامت $-$ برای فرمیون‌ها است.

نمایش ماتریسی $e^{\beta\mathcal{H}}$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} &\left\langle ۱,\cdots,N|e^{-\beta\mathcal{H}}|۱',\cdots,N'\right\rangle \\ &= \frac{۱}{N!} \sum_{\vec{k}_۱,\vec{k}_۲,\cdots,\vec{k}_N} \frac{e^{-\frac{\beta\hbar^۲K^۲}{۲m}}}{N!} \left[\left(\sum_P \delta_P \prod_{i=۱}^N u_{\vec{k}_i}(P_i)\right)\left(\sum_{P'} \delta_{P'} \prod_{i=۱}^N u^*_{\vec{k}_i}(P'_i)\right)\right], \end{aligned} \qquad (۲۹.۵)$$

نخستین ضریب بهنجارش $(N!)^{-۱}$ در عبارت بالا از آن جا می‌آید که جای‌گذاری $\vec{k}_i$ به جای $\vec{k}_{\tilde{P}_i}$ در معادله‌ی (۲۷.۵) معادل جای‌گذاری ψ با $\delta_{\tilde{P}}\psi$ است و در نتیجه $|\psi|^۲$ تحت چنین عملی ناوردا است. از آن جا که

$$\sum_P \delta_P \prod_{i=۱}^N u_{\vec{k}_i}(P_i) = \sum_P \delta_P \prod_{i=۱}^N u_{\vec{k}_{P_i}}(i), \qquad (۳۰.۵)$$

رابطه‌ی بالا را می‌شود به این صورت هم نوشت:

$$\begin{aligned} &\left\langle ۱,\cdots,N|e^{-\beta\mathcal{H}}|۱',\cdots,N'\right\rangle \\ &= (N!)^{-۲} \sum_K e^{-\frac{\beta\hbar^۲K^۲}{۲m}} \left[\left(\sum_P \delta_P \prod_{i=۱}^N u_{\vec{k}_i}(P_i)\right)\left(\sum_{\tilde{P}} \delta_{\tilde{P}} \prod_{i=۱}^N u^*_{\vec{k}_{\tilde{P}_i}}(i')\right)\right]. \end{aligned} \qquad (۳۱.۵)$$

دوباره با استفاده از این نکته که جای‌گذاری $\vec{k}_{\tilde{P}_i}$ به جای $\vec{k}_i$ در معادله‌ی (۲۸.۵) با جای‌گذاری ψ با $\delta_{\tilde{P}}\psi$ است معادل است و با توجه به ناوردایی جمع روی K تحت این تبدیل، می‌شود دید که

$$\begin{aligned} &\left\langle ۱,\cdots,N|e^{-\beta\mathcal{H}}|۱',\cdots,N'\right\rangle \\ &= \frac{۱}{(N!)^۲} \sum_K e^{-\frac{\beta\hbar^۲K^۲}{۲m}} \sum_{\tilde{P}} \left[\delta_{\tilde{P}} \left(\sum_P \delta_P \prod_{i=۱}^N u_{\vec{k}_i}(P_i)\right) u^*_{\vec{k}_{\tilde{P}_۱}}(۱') u^*_{\vec{k}_{\tilde{P}_۲}}(۲') \cdots u^*_{\vec{k}_{\tilde{P}_N}}(N')\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(N!)^2}\sum_K e^{-\frac{\beta\hbar^2K^2}{2m}}\sum_{\tilde{P}}\left[\left(\sum_P \delta_P\prod_{i=1}^N u_{\vec{k}_{\tilde{P}_i}}(P_i)\right)u^*_{\vec{k}_{\tilde{P}_1}}(1')u^*_{\vec{k}_{\tilde{P}_2}}(2')\cdots u^*_{\vec{k}_{\tilde{P}_N}}(N')\right]$$

$$= \frac{1}{N!}\sum_K e^{-\frac{\beta\hbar^2K^2}{2m}}\left[\sum_P \delta_P\prod_{i=1}^N u_{k_i}(P_i)u^*_{k_i}(i')\right]. \qquad (32.5)$$

این رابطه بسیار مهم است. برای دیدن اهمیت آن بهتر است با استفاده از تقریب

$$\sum_k \to \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k, \qquad (33.5)$$

این کمیت را حساب کنیم. با کمی محاسبه می‌شود دید که

$$\left\langle 1,\cdots,N|e^{-\beta\mathcal{H}}|1',\cdots,N'\right\rangle = \frac{1}{N!\lambda^{3N}}\sum_P \delta_P\prod_{i=1}^N f(\vec{r}_{P_i}-\vec{r'}_i), \qquad (34.5)$$

که در آن $f(z)=\exp\left(-z^2/\lambda^2\right)$ و $\lambda=\hbar\left(\frac{2\pi\beta}{m}\right)$ طول موج میانگین گرمایی است. روی قطر داریم،

$$\left\langle \vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_N|e^{-\beta\mathcal{H}}|\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_N\right\rangle = \frac{1}{N!\lambda^{3N}}\sum_P \delta_P\prod_{i=1}^N f(\vec{r}_{P_i}-\vec{r}_i). \qquad (35.5)$$

از آن جا که $f(0)=1$ جمع بالا را می‌شود به این صورت باز کرد:

$$\sum_P = 1\pm\sum_{i<j} f_{ij}f_{ji}+\sum_{i<j<k} f_{ij}f_{jk}f_{ki}\pm\cdots. \qquad (36.5)$$

که در آن $f_{ij}=f(\vec{r}_i-\vec{r}_j)$ است. اولین جمله در جمع بالا تابع پارش کلاسیک با ضریب گیبس $(N!)^{-1}$ را می‌دهد. جملات دیگر کاملاً کوانتمی هستند که به هم‌بستگی (correlation) تعبیر می‌شوند. یادآوری می‌کنم که برهم‌کنشی بین ذرات وجود ندارد. دیدیم که f یک تابع گوسی است که پهنایش را λ می‌دهد. پس اگر گاز رقیق باشد یا دما آن‌چنان زیاد باشد که $\ell=(V/N)^{1/3}$ فاصله‌ی نوعی ذرات شرط $\lambda\ll\ell$ را برآورده کند چون با تقریب خوبی $f_{ij}\simeq 0$ آثار کوانتمی ظاهر نخواهند شد و در نتیجه تابع پارش با مقدار کلاسیک آن برابر خواهد بود:

$$Q=Tre^{-\beta\mathcal{H}}\simeq\frac{1}{N!}\left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N. \qquad (37.5)$$

۵–۴–۱ گاز دو اتمی

در گازِ دو اتمی

$$\left\langle \vec{r}_q, \vec{r}_2 | e^{-\beta \mathcal{H}} | \vec{r}_q, \vec{r}_2 \right\rangle = \frac{1}{2\lambda^6} \left(1 \pm \exp(-2\pi \vec{r}_{12}^{\,2}/\lambda^2) \right). \qquad (۳۸.۵)$$

جمله‌یِ دوم همان جمله‌یِ هم‌بستگی است. این جمله را می توان به صورتِ کلاسیک با یک پتانسیلِ برهم‌کنشی داد:

$$v_s(\vec{r}) = -kT \ln[1 \pm \exp(-2\pi \vec{r}_{12}^{\,2}/\lambda^2)], \qquad (۳۹.۵)$$

می‌بینیم که این پتانسیل هم ارزِ جاذبه برایِ بوزون‌ها و دافعه‌یِ بسیار شدید برایِ فرمیون‌ها است.

فصل ٦

آمار کوانتمی نظریه‌ی گازهای ساده

٦–١ گاز ایده‌آل در هنگرد میکروکانونیک کوانتمی

گازی شامل N ذره‌ی بی‌برهم‌کنش تمیزناپذیر درحجم V و انرژی E در نظر بگیرید. هدف ما پیدا کردن $\Omega(N,V,E)$ یعنی تعداد میکروحالت‌های نظیر ماکروحالت (N,V,E) است. اگر حجم ظرف V زیاد باشد (در مقایسه با چه؟) آن‌گاه ترازهای انرژی تک ذره درهم‌فشرده هستند. پس برای توصیف دستگاه بهتر است ترازهای انرژی را در تعداد زیادی یاخته دسته‌بندی کنیم. هر یاخته شامل $g_i \gg 0$ تراز انرژی است که میانگین انرژی آن‌ها با ϵ_i داده می‌شود. یک توزیع نمونه از ذرات با $\{n_i\}$ داده می‌شود که به این معنا است که n_i ذره در یاخته‌ی iاُم قرار دارند. به این ترتیب

$$\Omega(N,V,E) = \sum_{\{n_i\}} W(\{n_i\}), \tag{١.٦}$$

که در آن $W(\{n_i\})$ تعداد میکروحالت‌های متمایز نظیر توزیع $\{n_i\}$ است:

$$W(\{n_i\}) = \prod_i w(i), \tag{٢.٦}$$

که $w(i)$ تعداد ِ میکروحالت‌های ِ متمایز ِ یاخته ی ِ iاُم است. در معادله‌ی ِ (۱.٦) جمع بر روی ِ تمام ِ توزیع‌های ِ $\{n_i\}$ ِ ممکن است که شرایط ِ زیر را برآورده سازند:

$$\begin{aligned} \sum_i n_i &= N, \\ \sum_i n_i \epsilon_i &= E. \end{aligned} \qquad (۳.٦)$$

در مورد ِ بوزون‌ها، $w(n_i)$ تعداد ِ راه‌های ِ متمایزی است که می‌شود n_i ذره‌ی ِ یکسان ِ تمیزناپذیر را در g_i جای‌گاه نهاد:

$$w_{BE}(i) = \frac{(n_i + g_i - ۱)!}{n_i!(g_i - ۱)!}. \qquad (۴.٦)$$

و در مورد ِ فرمیون‌ها چون هر جای‌گاه توسط ِ یک فرمیون اشغال می‌شود $w(i)$ تعداد ِ راه‌های ِ متمایزی است که می‌شود g_i جای‌گاه را به دو دسته‌ی ِ (n_i)تایی و $(g_i - n_i)$تایی تقسیم کرد:

$$w_{FD}(i) = \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}. \qquad (۵.٦)$$

برای ِ گاز ِ کلاسیک که در آن ذرات تمییزپذیر هستند (آمار ِ ماکسول–بولتزمان) $w(i)$ تعداد ِ راه‌های ِ متمایزی است که می‌شود n_i ذره‌ی ِ یکسان ِ تمیزپذیر را در g_i جای‌گاه نهاد پس $w(i) = g_i^{n_i}$. اما در این جا باید رابطه‌ی ِ (۲.٦) را هم اصلاح کرد. در محاسبه‌ی ِ $W(\{n_i\})$ باید وزن ِ

$$\frac{N!}{n_۱!n_۲!\cdots}$$

که بیانگر ِ تعداد ِ دفعاتی است که توزیع ِ $\{n_i\}$ پیش آید و ضریب ِ اصلاحی ِ گیبس را هم وارد کرد. پس،

$$W_{MB}(\{n_i\}) = \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}. \qquad (٦.٦)$$

آنتروپی با رابطه‌ی ِ

$$S = k \ln \Omega(N, V, E) = k \ln \sum_{\{n_i\}} W(\{n_i\})$$

داده می‌شود. ما در این جا این رابطه را به این صورت تقریب می‌زنیم که

$$S \simeq k \ln W(\{n_i^*\}), \tag{۷.٦}$$

که $\{n_i^*\}$ توزیعی است که تابع ِ $\ln W(\{n_i\})$ را با حفظ ِ قیود ِ (۳.٦) بیشینه می‌کند. به ساده‌گی می‌شود دید که

$$\frac{n_i^*}{g_i} = \frac{۱}{a + e^{\alpha+\beta\epsilon_i}}, \tag{۸.٦}$$

که در آن α و β به ترتیب ضرایب ِ نامعیین ِ لاگرانژ نظیر ِ قیود ِ اول و دوم در رابطه‌ی ِ (۳.٦) است. پرمایه‌ی ِ a هم آمار ِ دستگاه را می‌دهد: برای ِ بوزون‌ها $a = -۱$، برای ِفرمیون‌ها $a = +۱$ و برای ِ ذرات ِ ماکسول—بولتزمان $a = ۰$ است.

رابطه‌ی ِ (۸.٦) می‌گوید محتمل‌ترین تعداد ذره‌ای که در هر تراز ِ انرژی قرار می‌گیرد تابعی از انرژی ِ آن تراز است و از چگونگی ِ یاخته‌بندی ِ ترازها مستقل است. با استفاده از رابطه‌ی ِ

$$\begin{aligned} \ln W(\{n_i\}) &= \sum_i \ln w(n_i) \\ &\simeq \sum_i \left[n_i \ln\left(\frac{g_i}{n_i} - a\right) - \frac{g_i}{a} \ln\left(۱ - a\frac{n_i}{g_i}\right)\right], \end{aligned} \tag{۹.٦}$$

و قیود ِ (۳.٦) می‌شود نشان داد که

$$\frac{۱}{a} \sum_i g_i \ln\left(۱ + a e^{-\alpha-\beta\epsilon_i}\right) = \frac{S}{k} - \alpha N - \beta E. \tag{۱۰.٦}$$

با جای‌گذاری ِ

$$\alpha = -\frac{\mu}{kT}, \qquad \beta = \frac{۱}{kT},$$

در رابطه‌ی ِ (۱۰.٦) و با یادآوری ِ رابطه‌ی ِ

$$TS + \mu N - E = PV$$

می‌بینیم که

$$PV = \frac{kT}{a}\sum_i g_i \ln\left(۱ + ae^{-\alpha-\beta\epsilon_i}\right). \qquad (۱۱.٦)$$

برای ِ گاز ِ ماکسول–بولتزمان ($a \to ۰$) خواهیم داشت:

$$PV = kT\sum_i g_i e^{-\alpha-\beta\epsilon_i} = kT\sum_i n_i^* = NKT. \qquad (۱۲.٦)$$

٦–۲ گاز ایده‌آل در هنگردهای کوانتمی کانونیک و گراند کانونیک

در هنگرد ِ کانونیک ترمودینامیک ِ یک دستگاه با تابع ِ پارش ِ داده می‌شود،

$$Q_N(V,T) = \sum_E e^{-\beta E}, \qquad (۱۳.٦)$$

که در این جا جمع روی ِ E ِ ویژه‌مقدارهای ِ انرژی ِ دستگاه است و $\beta = (KT)^{-۱}$. ویژه مقدارهای انرژی را می‌توان بر حسب ِ ϵ ِ ویژه‌مقدار ِ انرژی ِ تک ذره و n_ϵ عدد ِ اشغال ِ آن تراز نوشت:

$$E = \sum_\epsilon n_\epsilon \epsilon, \qquad (۱۴.٦)$$

$$\sum_\epsilon n_\epsilon = N. \qquad (۱۵.٦)$$

تابع ِ پارش را می‌توان به این صورت نوشت:

$$Q_N(V,T) = \sum_{\{n_\epsilon\}} g\{n_\epsilon\} e^{-\beta\sum_\epsilon n_\epsilon\epsilon}, \qquad (۱٦.٦)$$

که $g\{n_\epsilon\}$ تابع ِ وزن ِ آماری ِ نظیر ِ توزیع ِ $\{n_\epsilon\}$ است:

$$g_{BE}\{n_\epsilon\} = ۱, \qquad (۱۷.٦)$$

$$g_{FD}\{n_\epsilon\} = \begin{cases} ۱ & \boxed{\text{اگر همه‌ی } n_\epsilon \text{ ها صفر یا یک باشند}} \\ ۰ & \boxed{\text{اگر دست کم یک } n_\epsilon \text{ بزرگتر از یک باشد}} \end{cases} \qquad (۱۸.٦)$$

$$g_{MB}\{n_\epsilon\} = \prod_i \frac{۱}{n_\epsilon!}. \qquad (۱۹.٦)$$

باید توجه کرد که در این جا ما دیگر ترازهای ِ انرژی را یاخته‌بندی نکرده‌ایم و در واقع عبارات ِ بالا را می‌شود جای‌گذاری ِ $g_i = ۱$ در روابط ِ (۴.٦)—(٦.٦) به دست آورد.

در مورد ِ گاز ِ ماکسول—بولتزمان از جای‌گذاری ِ معادله‌ی ِ (۱۹.٦) در (۱٦.٦) و با توجه به شرط ِ (۱۵.٦) داریم،

$$\begin{aligned} Q_N(V,T) &= \frac{۱}{N!}\sum_{\{n_\epsilon\}}\left[\left(\prod_\epsilon \frac{۱}{n_\epsilon!}\right)\left(\prod_\epsilon (e^{-\beta\epsilon})^{n_\epsilon}\right)\right] \\ &= \frac{۱}{N!}\left[\sum_\epsilon e^{-\beta\epsilon}\right]^N . \end{aligned} \qquad (۲۰.٦)$$

در مورد ِ گازهای ِ فرمیونی و بوزونی محاسبه‌ی ِ تابع ِ پارش

$$Q_N(V,T) = \sum_{\{n_\epsilon\}}\left(e^{-\beta\sum_\epsilon n_\epsilon\epsilon}\right), \qquad (۲۱.٦)$$

به خاطر ِ قید ِ (۱۵.٦) کار ِ دشواری است. در این جا آسان‌تر است که تابع ِ پارش ِ بزرگ $\mathcal{L}$ را حساب کنیم چرا که در محاسبه‌ی ِ $\mathcal{L}$ به واسطه‌ی ِ جمع ِ روی ِ N قید ِ (۱۵.٦) عملاً برداشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(z,V,T) &= \sum_N z^N Q_N \\ &= \sum_{n_۰,n_۱,\cdots}\left[(ze^{-\beta\epsilon_۰})^{n_۰}(ze^{-\beta\epsilon_۱})^{n_۱}\cdots\right] \\ &= \left[\sum_{n_۰}(ze^{-\beta\epsilon_۰})^{n_۰}\right]\left[\sum_{n_۱}(ze^{-\beta\epsilon_۱})^{n_۱}\right]\cdots . \end{aligned} \qquad (۲۲.٦)$$

در مورد ِ گاز ِ فرمیونی $n_i = ۰, ۱$ اما در مورد ِ گاز ِ بوزونی $n_i = ۰, ۱, ۲, \cdots$. پس:

$$\mathcal{L}(z,V,T) = \begin{cases} \prod_\epsilon \frac{۱}{(۱-ze^{-\beta\epsilon})} & \boxed{\text{گاز بوزونی}} \\ \prod_\epsilon (۱+ze^{-\beta\epsilon}) & \boxed{\text{گاز فرمیونی}} \end{cases} \qquad (۲۳.٦)$$

می‌دانیم پتانسیل ِ $q = PV/kT$ با لگاریتم ِتابع ِ پارش ِ بزرگ داده می‌شود. با فرض ِ $z = e^{-\alpha}$ و انتخاب ِطبیعی ِ $\alpha = -\mu/kT$ می‌شود نوشت :

$$q(z,V,T) = \frac{PV}{kT} = \frac{۱}{a}\sum_\epsilon \ln(۱+aze^{-\beta\epsilon}), \qquad (۲۴.٦)$$

که برای ِ بوزون‌ها، فرمیون‌ها و گاز ِ ماکسول–بولتزمان به ترتیب $a = -۱, +۱, ۰$. مهم‌ترین نتیجه در این جا شاید با محاسبه‌ی ِ متوسط ِ n_ϵ به دست آید:

$$\begin{aligned} \langle n_\epsilon \rangle &= \frac{۱}{\mathcal{L}} \left[-\frac{۱}{\beta} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} \right) \right] \\ &= \frac{۱}{z^{-۱} e^{\beta\epsilon} + a}, \end{aligned} \tag{۲۵.٦}$$

که همان مقداری است که برای ِ محتمل‌ترین مقدار یعنی n^*_ϵ به دست آوردیم.

٦–۳ آمار عددهای اشغال

رابطه‌ی ِ (۲۵.٦) عدد ِ اشغال ِ میانگین برای ِ ترازی به انرژی ِ ϵ را در سه آمار ِ بوزونی، فرمیونی و ماکسولی را می‌دهد. در مورد ِ فرمیون‌ها می‌بینیم که عدد ِ اشغال ِ متوسط همواره مقداری بین ِ صفر و یک را اختیار می‌کند و μ هم می‌تواند هر مقداری را اختیار کند. اما در مورد ِ بوزون‌ها می‌بینیم که μ باید از همه‌ی ِ مقادیر ِ ϵ کوچک‌تر باشد. در واقع می‌شود دید که

$$\lim_{\mu \to \epsilon_۰} \langle n_۰ \rangle \to \infty.$$

به این پدیده چگالش ِ بوز–اینشتین می‌گویند. مشاهده‌ی ِ مهم ِ دیگر این است که اگر

$$\exp\{(\epsilon - \mu)/kT\} \gg ۱$$

آن گاه $\langle n_\epsilon \rangle \ll ۱$. به علاوه در این جا تفاوت ِ بین ِ آمارهای ِ مختلف در مقدار ِ عدد ِ اشغال ِ متوسط دیده نمی‌شود. از طرف ِ دیگر می‌دانیم که در دماهای ِ بالا محاسبات ِ کوانتمی به نتایج ِ کلاسیک منجر می‌شوند. از این جا نتیجه می‌شود که پتانسیل ِ شیمیایی ِ دستگاه باید در شرط ِ $-\mu \gg ۱$ صدق کند. نشان دهید که این شرط هم‌ارز ِ شرط ِ

$$\frac{N\lambda^۳}{V} \ll ۱$$

است که λ طول ِ موج ِ میانگین ِ گرمایی است.

افت و خیزهای ِ n_ϵ حول ِ مقدار ِ میانگینش را می‌شود به کمک ِ رابطه‌ی ِ

$$\left\langle n_\epsilon^{۲} \right\rangle = \frac{۱}{\mathcal{L}} \left[\left(-\frac{۱}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right)^{۲} \mathcal{L} \right], \tag{۲۶.۶}$$

و رابطه‌ی ِ (۲۵.۶) حساب کرد:

$$\frac{\left\langle (n_\epsilon - \langle n_\epsilon \rangle)^{۲} \right\rangle}{\langle n_\epsilon \rangle^{۲}} = \left(\frac{۱}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) \frac{۱}{\langle n_\epsilon \rangle} = \frac{۱}{\langle n_\epsilon \rangle} - a. \tag{۲۷.۶}$$

می‌بینیم که برای ِ فرمیون‌ها

$$\lim_{\langle n_\epsilon \rangle \to ۱} \left(\frac{\Delta n_\epsilon}{\langle n_\epsilon \rangle} \right)_{FD} \to ۰.$$

و برای ِ بوزون‌ها

$$\left(\frac{\Delta n_\epsilon}{\langle n_\epsilon \rangle} \right)_{BE} > ۱$$

. هم‌چنین با فرض ِ $\langle n_\epsilon \rangle_{FD} = \langle n_\epsilon \rangle_{MB} = \langle n_\epsilon \rangle_{BE}$ داریم

$$(\Delta n_\epsilon)_{FD} < (\Delta n_\epsilon)_{MB} < (\Delta n_\epsilon)_{BE}. \tag{۲۸.۶}$$

در پایان ِ خوب است $p_\epsilon(n)$ احتمال ِ قرار گرفتن ِ n ذره در تراز ِ ϵ را محاسبه کنیم. برای ِ فرمیون‌ها داریم

$$\langle n_\epsilon \rangle = \sum_{n=۰}^{۱} n p_\epsilon(n) = p_\epsilon(۱). \tag{۲۹.۶}$$

پس

$$p_\epsilon(۰) = ۱ - \langle n_\epsilon \rangle, \qquad p_\epsilon(۱) = \langle n_\epsilon \rangle. \tag{۳۰.۶}$$

در مورد ِ بوزون‌ها با توجه با رابطه‌ی ِ (۲۲.۶) و با مقایسه‌ی ِ رابطه‌ی ِ

$$\langle n_\epsilon \rangle = \left[-\frac{۱}{\beta} \left(\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \epsilon} \right) \right], \tag{۳۱.۶}$$

با آن چه که از تعریف ِ $p_\epsilon(n)$ بر می آید،

$$\langle n_\epsilon \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n p_\epsilon(n) \qquad (۳۲.۶)$$

می‌بینیم که $p_\epsilon(n)$ با $(ze^{-\beta\epsilon})^n$ متناسب است. پس از بهنجارش خواهیم داشت:

$$p_\epsilon(n) = (ze^{\beta\epsilon})^n[1 - ze^{-\beta\epsilon}] = \frac{\langle n_\epsilon \rangle^n}{(1 + \langle n_\epsilon \rangle)^{n+1}}. \qquad (۳۳.۶)$$

در مورد ِ ذرات ِ ماکسولی به کمک ِ معادله‌ی ِ (۲۰.۶) می‌شود دید که

$$p_\epsilon(n) = \frac{\langle n_\epsilon \rangle^n}{n!} e^{-\langle n_\epsilon \rangle}.$$

در مورد ِ بوزون‌ها نسبت ِ $p_\epsilon(n)/p_\epsilon(n-1)$ مقدار ِ ثابتی است در حالیکه این نسبت در مورد ِ آمار ِ ماکسول با نسبت ِ $1/n$ کاهش می‌یابد. از این جا نتیجه می‌شود که بوزون‌ها بیش از ذرات ِ کلاسیک میل به قرار گرفتن در یک تراز را دارند.

فشار یک گاز را می‌شود به کمک ِ معادله‌ی ِ (۲۴.۶) به دست آورد:

$$\begin{aligned} P &= \frac{kT}{a} \int_0^\infty \ln[1 + aze^{-\beta\epsilon(p)}] \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} \\ &= \frac{4\pi}{3h^3} \int_0^\infty \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon(p)} + a} \left(p \frac{d\epsilon}{dp} \right) p^2 dp, \end{aligned} \qquad (۳۴.۶)$$

که در این جا فرض کرده‌ایم ϵ یک تابع ِ صعودی از تکانه باشد. هم‌چنین داریم:

$$N = \int \langle n_p \rangle \frac{V d^3 p}{h^3} = \int_0^\infty \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon(p)} + a} \frac{4\pi V p^2 dp}{h^3}. \qquad (۳۵.۶)$$

با مقایسه‌ی ِ دو رابطه‌ی ِ بالا به این نتیجه می‌رسیم که

$$P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \left\langle p \frac{d\epsilon}{dp} \right\rangle = \frac{1}{3} n \langle pu \rangle, \qquad (۳۶.۶)$$

که n چگالی ِ ذرات ِ گاز و u سرعت ِ یک ذره است. با فرض ِ $\epsilon = p^s$ رابطه‌ی ِ بالا به قانون ِ عمومی ِ گازها منجر می‌شود:

$$PV = \frac{s}{3} E.$$

می‌بینیم که این نتیجه از a مستقل است پس برای ِ هر سه آمار برقرار است.

فصل ۷

گاز ایده‌آل بوزونی

در این فصل به مطالعه‌ی ِ گاز ِ ایده‌آل ِ بوزونی می‌پردازیم. چگالش ِ بوز—اینشتین، تابش ِ جسم ِ سیاه و ارتعاشات ِ شبکه‌ی ِ بلور موضوعات ِ این بخش هستند.

۷—۱ ترمودینامیک گاز ایده‌آل بوزونی

در فصل ِ شش دیدیم که برای ِ گاز ِ ایده‌آل ِ بوزونی

$$\frac{PV}{kT} = \ln \mathcal{L} = -\sum_{\epsilon} \ln(۱ - ze^{-\beta\epsilon}), \qquad (۱.۷)$$

$$N = \sum_{\epsilon} \langle n_\epsilon \rangle = \sum_{\epsilon} \frac{۱}{z^{-۱}e^{\beta\epsilon} - ۱}, \qquad (۲.۷)$$

که $\beta = ۱/kT$ و $z = \exp(\mu/kT)$. برای ِ دستگاهی با حجم ِ زیاد طیف ِ انرژی ِ تک ذره $\epsilon(\vec{p})$ تقریباً پیوسته است و در نتیجه می‌شود جمع ِ سمت ِ راست ِ روابط ِ بالا را با انتگرال جای‌گذاری کرد. میزان[۱] ِ انتگرال‌گیری در این جای‌گذاری برای ِ گاز ِ غیر ِ نسبیتی

$$a(\epsilon)d\epsilon = \frac{۲\pi V}{h^۳}(۲m)^{۳/۲}\epsilon^{۱/۲}d\epsilon, \qquad (۳.۷)$$

[۱] measure

است که می‌شود $a(\epsilon)$ را به چگالی ِ ترازها تعبیر کرد. از آن جا که $a(۰) = ۰$ این جای‌گذاری تراز ِ پایه با انرژی ِ $\epsilon = ۰$ را دربر نمی‌گیرد و باید آن را جداگانه به حساب آورد. پس در حد ِ $V \to \infty$ داریم

$$\frac{P}{kT} = -\frac{۲\pi}{h^۳}(۲m)^{۳/۲}\int_۰^\infty \epsilon^{۱/۲}\ln(۱ - ze^{-\beta\epsilon})d\epsilon - \frac{۱}{V}\ln(۱-z), \qquad (۴.۷)$$

$$\frac{N}{V} = \frac{۲\pi}{h^۳}(۲m)^{۳/۲}\int_۰^\infty \frac{\epsilon^{۱/۲}}{z^{-۱}e^{\beta\epsilon}-۱} + \frac{۱}{V}\frac{z}{۱-z}. \qquad (۵.۷)$$

در حد ِ $N \to \infty$ می‌شود از جمله‌ی ِ دوم در سمت ِ راست ِ معادله‌ی ِ (۴.۷) چشم‌پوشید چرا که این جمله تنها در حد ِ $z \to ۱$ یعنی در چگالش ِ بوز–اینشتین مهم می‌شود. در واقع چون $z/(۱-z) = N_۰$ و در حد ِ $z \to ۱$، $N_۰$ عددی بزرگ از مرتبه‌ی ِ N است، در نتیجه در این حد $\ln(۱-z) \sim \ln N$. پس جمله‌ی ِ $V^{-۱}\ln(۱-z)$ نهایتاً از مرتبه‌ی ِ $(N^{-۱}\ln N) \to ۰$ خواهد بود که در حد ِ $N \to \infty$ به صفر میل می‌کند. پس در حد ِ $N \to \infty$ و $V \to \infty$، پس از انتگرال‌گیری، داریم

$$\frac{P}{kT} = \frac{۱}{\lambda^۳}g_{۵/۲}(z), \qquad (۶.۷)$$

$$\frac{N - N_۰}{V} = \frac{۱}{\lambda^۳}g_{۳/۲}(z), \qquad (۷.۷)$$

که $\lambda = h/(۲\pi mkT)^{۱/۲}$ و

$$g_n(z) = \frac{۱}{\Gamma(n)}\int_۰^\infty \frac{x^{n-۱}}{z^{-۱}e^x - ۱}dx. \qquad (۸.۷)$$

با استفاده از رابطه‌ی ِ

$$U = -\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\mathcal{L}\right)_{z,V} = kT^۲\left\{\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{PV}{kT}\right)\right\}_{z,V}$$
$$= kT^۲Vg_{۵/۲}(z)\frac{d}{dT}\frac{۱}{\lambda^۳} = \frac{۳/۲}{k}T\frac{V}{\lambda^۳}g_{۵/۲}(z), \qquad (۹.۷)$$

می‌شود دید که U، انرژی ِ داخلی، در اتحاد ِ زیر صدق می‌کند:

$$P = \frac{۲}{۳}(U/V). \qquad (۱۰.۷)$$

برای ِ به دست آوردن ِ معادله‌ی ِ حالت ِ گاز ِ ایده‌آل ِ بوزونی باید در روابط ِ (۶.۷) و (۷.۷) z را حذف کرد. برای ِ z های ِ کوچک با استفاده از بسط ِ

$$g_n(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l^n}$$

و با چشم‌پوشی از $N_0 = z/(1-z)$ در برابر ِ N در رابطه‌ی ِ (۷.۷) داریم

$$\frac{PV}{NkT} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1}, \qquad (11.7)$$

که در این جا $v = 1/n$ که n چگالی ِ گاز است و

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= -0.12667, \\ a_3 &= -0.00633. \end{aligned} \qquad (12.7)$$

پرسش: این که $a_2, a_3 < 0$ چه معنایی دارد؟

ظرفیت ِ گرمایی گاز هم با رابطه‌ی ِ زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{C_V}{Nk} &= \frac{1}{Nk}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V} = \frac{3}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{PV}{Nk}\right)\right\}_v \\ &= \frac{3}{2}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{5-3l}{2} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1} \\ &= \frac{3}{2}\left(1 + 0.0884\left(\frac{\lambda^3}{v}\right) + 0.00676\left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^2 + \cdots\right). \end{aligned} \qquad (13.7)$$

چگالش بوز–اینشتین

اگر با N_e تعداد ِ کل ِ ذراتی که در ترازهای ِ برانگیخته قرار دارند نمایش دهیم چون $g_n(z)$ یک تابع ِ صعودی است که حد بالای ِ آن $g_n(1) = \zeta(n)$ است از رابطه‌ی ِ (۷.۷) داریم،

$$N_e \le \frac{V}{\lambda^3}\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2.612\frac{V}{\lambda^3}.$$

در این حالت $N_e \simeq N$ و z از معادله‌ی ِ (۷.۷) به دست می آید . اگر $N > \frac{V}{\lambda^۳}\zeta(\frac{۳}{۲})$ آن گاه

$$N_۰ = N - \frac{V}{\lambda^۳}\zeta\left(\frac{۳}{۲}\right), \qquad (۱۴.۷)$$

و z از رابطه‌ی ِ $z = N_۰/(۱ + N_۰)$ به دست می‌آید. در $T \to ۰$ مقدار ِ جمله‌ی ِ دوم در ابطه‌ی ِ (۱۴.۷) به صفر میل می‌کند که به این معنا است که در دماهای ِ کم‌تر از

$$T_c = \frac{h^۲}{۲\pi mk}\left(\frac{N}{V\zeta(\frac{۳}{۲})}\right)^{۲/۳}, \qquad (۱۵.۷)$$

کسر ِ قابل ِ توجهی از ذرات به تراز ِ پایه می روند که به این پدیده چگالش بوز–اینشتین می‌گویند. در $T < T_c$ $z = ۱$. در این محدوده‌ی ِ دما فشار ِ گاز از رابطه‌ی ِ (۶.۷) به صورت ِ زیر به دست می آید:

$$P(T) = \frac{kT}{\lambda^۳}\zeta\left(\frac{۵}{۲}\right) \sim T^{۵/۲}, \qquad T < T_c, \qquad (۱۶.۷)$$

و مستقل از N و V است. در $T = T_c$ فشار ِ گاز

$$P(T_c) = \frac{\zeta(\frac{۵}{۲})}{\zeta(\frac{۳}{۲})}\left(\frac{N}{V}kT_c\right) \simeq ۰.۵۱\frac{N}{V}kT_c,$$

که این کمی بیش از نصف ِ فشار ِ گاز ِ کلاسیک در همان دما است. برای ِ $T > T_c$ فشار از معادلات ِ (۶.۷) و (۷.۷) به دست می آید.

پس از کمی محاسبه برای ِ C_V خواهیم داشت:

$$\frac{C_V}{Nk} = \begin{cases} \frac{۱۵}{۴}\zeta(\frac{۵}{۲})\frac{v}{\lambda^۳}, & T < T_c, \\ \frac{۱۵}{۴}\frac{\zeta(\frac{۵}{۲})}{\zeta(\frac{۳}{۲})} \simeq ۱.۹۲۵, & T = T_c, \\ \frac{۱۵}{۴}\frac{g_{۵/۲}(z)}{g_{۳/۲}(z)} - \frac{۹}{۴}\frac{g_{۳/۲}(z)}{g_{۱/۲}(z)}, & T > T_c. \end{cases} \qquad (۱۷.۷)$$

از این جا معلوم می‌شود که C_V به عنوان ِ تابعی از دما هرچند پیوسته است اما هموار نیست:

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)_{T\to^- T_c} - \left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)_{T\to^+ T_c} = \frac{۲۷Nk}{۱۶\pi T_c}\left[\zeta\left(\frac{۳}{۲}\right)\right]^۲ \simeq ۳.۶۶۵\frac{Nk}{T_c}. \qquad (۱۸.۷)$$

نمودارهای هم‌دما و بی‌دررو

در دمای ِ ثابت شاخص ِ رویداد ِ چگالش ِ بوز–اینشتین حجم ِ مشخصه‌ی ِ ویژه‌ی ِ $v_c = \lambda^3/\zeta(\frac{3}{2})$ است. در $v < v_c$ فشار ثابت است و مقدار ِ آن با

$$P_0 = \frac{kT}{\lambda^3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right),$$

داده می‌شود. برای ِ به دست آوردن ِ نمودار ِ بی‌دررو ابتدا آنتروپی را با کمک ِ اتحاد ِ $U - TS + PV = N\mu$ حساب می‌کنیم:

$$\frac{S}{kT} = \begin{cases} \frac{5}{2}\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \ln z, & T \geq T_c, \qquad \left(g_{3/2}(z) = \lambda^3/v\right) \\ \frac{5}{2}\frac{v}{\lambda^3}\zeta(\frac{5}{2}), & T \leq T_c. \end{cases} \tag{۱۹.۷}$$

برای ِ فرآیندهای ِ بی‌دررو آنتروپی ثابت است. پس برای ِ $T < T_c$ در فرآیند ِ بی‌دررو v/λ^3 ثابت است:

$$vT^{3/2} = const.$$

با استفاده از رابطه‌ی ِ (۱۶.۷) خواهیم داشت:

$$Pv^{5/3} = const. \tag{۲۰.۷}$$

در آخر γ نسبت ِ C_P به C_V را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{C_P}{C_V} = 1 + \frac{4}{9}\frac{C_V}{Nk}\frac{g_{1/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \\ &= \frac{5}{3}\frac{g_{5/2}(z)g_{1/2}(z)}{g^2_{3/2}(z)} \end{aligned} \tag{۲۱.۷}$$

در نتیجه تنها برای ِ $T \gg T_c$ $(z \to 0)$، $\gamma = \frac{5}{3}$ خواهد بود.

۷–۲ ترمودینامیک تابش جسم سیاه

برای ِ توصیف ِ طیف ِ جسم ِ سیاه دو دیدگاه وجود دارد، دیدگاه ِ اینشتین و دیدگاه ِ پلانک. ما در این جا تنها به مدل ِ اینشتین می‌پردازیم. از نگاه ِ اینشتین مساله‌ی ِ تابش ِ جسم ِ سیاه مساله‌ی ِ یک گاز فوتونی است که شامل ِ تعداد ِ نامعینی ذره‌ی ِ بوزونی ِ تمییز ناپذیر است. از منظر ِ ترمودینامیکی نامعلوم بودن ِ تعداد ِ فوتون‌ها به این معنا است که پتانسیل ِ شیمیایی $\mu = ۰$ و در نتیجه $z = ۱$. پس برای ِ تابع ِ پارش ِ بزرگ داریم:

$$\ln \mathcal{L} = \frac{PV}{kT} = -\sum_{\epsilon} \ln(۱ - e^{-\epsilon/kT}). \qquad (۲۲.۷)$$

توزیع ِ طیف ِ انرژی را می‌شود به کمک ِ رابطه‌ی ِ (۲۵.۶) به دست آورد که متوسط ِ تعداد ِ فوتون‌ها در ترازی با انرژی ِ ϵ را می‌دهد،

$$\langle n_\epsilon \rangle = \frac{۱}{e^{\epsilon/kT} - ۱}, \qquad (۲۳.۷)$$

با فرض ِ $\epsilon = \hbar\omega$ که ω بسامد ِ فوتون است داریم،

$$\langle \epsilon_\omega \rangle = \hbar\omega \langle n_\omega \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - ۱}. \qquad (۲۴.۷)$$

از آن جا که در حجم ِ V تعداد ِ فوتون‌هایی که تکانه‌ی ِ آن ها در بازه‌ی ِ $(\vec{p}, \vec{p} + d\vec{p})$ است با $\frac{۱}{۸} d^۳n = V d^۳p/h^۳$ داده می‌شود و چون برای ِ فوتون $\epsilon = pc$ که در آن c سرعت ِ نور است، تعداد ِ ترازهایی که انرژی ِ آن ها در بازه‌ی ِ نظیر ِ $(\omega, \omega + d\omega)$ واقع است با رابطه‌ی ِ زیر داده می‌شود،

$$g(\omega)d\omega = ۲.\frac{V}{h^۳} \left\{ ۴\pi \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^۲ \left(\frac{\hbar d\omega}{c}\right) \right\} = \frac{V\omega^۲ d\omega}{\pi^۲ c^۳}. \qquad (۲۵.۷)$$

ضریب ِ ۲ پس از اولین تساوی در رابطه‌ی ِ بالا به واسطه‌ی ِ وجود ِ دو جهت ِ قطبش برای ِ فوتون‌ها در نظر گرفته شده است. از روابط ِ (۲۳.۷) و (۲۵.۷) تابع ِ توزیع به این صورت به دست می آید:

$$u(\omega)d\omega = \frac{\hbar}{\pi^۲ c^۳} \frac{\omega^۳ d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - ۱}, \qquad (۲۶.۷)$$

که همان نمودار ِ تجربی را می‌دهد.

کمیت‌های ِ ترمودینامیکی را می‌شود از روی ِ $\mathcal{L}$ به دست آورد. برای ِ این کار جمع ِ روی ِ ϵ را با انتگرال‌گیری روی ِ ϵ تقریب می‌زنیم. میزان ِ انتگرال‌گیری در این جا

$$a(\epsilon)d\epsilon = ۲V\frac{۴\pi p^۲ dp}{h^۳} = \frac{۸\pi V}{h^۳c^۳}\epsilon d\epsilon, \qquad (۲۷.۷)$$

است.

$$\begin{aligned}\ln\mathcal{L} &= -\int ln(۱-e^{-\epsilon/kT})\frac{۸\pi V}{h^۳c^۳}\epsilon d\epsilon \\ &= \frac{۸\pi V}{۳h^۳c^۳}(kT)^۳\int_۰^\infty \frac{x^۳dx}{e^x-۱} \\ &= \frac{۸\pi^۵V}{۴۵h^۳c^۳}(kT)^۳. \qquad (۲۸.۷)\end{aligned}$$

برای ِ انرژی ِ داخلی داریم

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\mathcal{L} = \frac{۳}{kT}\ln\mathcal{L}, \qquad (۲۹.۷)$$

تساوی ِ دوم در رابطه‌ی ِ بالا می‌گوید برای ِ فوتون‌ها

$$PV = \frac{۱}{۳}U.$$

از رابطه‌ی ِ (۲۹.۷) هم‌چنین می‌شود قانون ِ استفان–بولتزمن برای ِ تابش ِ جسم ِ سیاه را به دست آورد. بر اساس ِ این قانون S آهنگ ِ تابش ِ انرژی در واحد ِ سطح از یک روزنه بر جسم ِ سیاه با رابطه‌ی ِ زیر داده می شود،

$$S = \sigma T^۴, \qquad (۳۰.۷)$$

که در آن σ ثابت ِ استفان نام دارد. این قانون را با توجه به این که $S = \frac{۱}{۴}\frac{U}{V}$ از رابطه‌ی ِ (۲۹.۷) نتیجه می‌شود و مقداری که برای ِ σ به دست می آید با مقدار ِ تجربی ِ آن توافق دارد:

$$\sigma = \frac{\pi^۲k^۴}{۶۰\hbar^۳c^۲} = ۵.۶۷۰ \times ۱۰^{-۸}Wm^{-۲}K^{-۴}. \qquad (۳۱.۷)$$

چون $\mu = ۰$، انرژی ِ آزاد ِ هلمهولتز $A = -PV = -\frac{۱}{۳}U$ و در نتیجه آنتروپی ِ گاز ِ فوتونی با رابطه‌ی ِ زیر داده می‌شود،

$$S = \frac{U - A}{T} = \frac{۴}{۳}\frac{U}{T} = const.VT^{۳}. \qquad (۳۲.۷)$$

در نتیجه

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = ۳S,$$

و برای ِ فرآیند ِ بی‌دررو داریم،

$$VT^{۳} = const., \qquad (۳۳.۷)$$

$$PV^{۴/۳} = const.. \qquad (۳۴.۷)$$

تمرین: C_P را حساب کنید.

۷—۳ گرمای ویژه‌ی جامدات بلوری

می‌دانیم که نوسانات ِ کوچک نزدیک ِ نقطه‌ی ِ تعادل را می‌شود با نوسانگر ِ هماهنگ. ساده تقریب زد. از این رو مساله‌ی ِ ارتعاشات ِ شبکه‌ی ِ بلوری را می‌شود به مساله‌ی ِ تعدادی نوسانگر ِ هماهنگ. ساده با بسامد ِ ω_s که به میدان ِ امواج ِ صوتی در شبکه‌ی ِ بلوری جفت شده‌اند ساده کرد. کوانتای ِ انرژی ِ موج ِ صوتی در شبکه‌ی ِ بلوری را فونون می‌نامند. داده می‌شود. از این رو مساله‌ی ِ ارتعاشات ِ شبکه‌ی ِ بلوری همان مساله‌ی ِ تابش ِ جسم ِ سیاه است که در آن به جای ِ فوتون، فونون داریم. با استفاده از رابطه‌ی ِ (۲۲.۷) و اتحاد ِ $U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\mathcal{L}$ و فرض ِ $\epsilon = \hbar\omega$ که در آن ω بسامد ِ فونون است داریم:

$$U(T) = \sum_i \hbar\omega_i \langle n_i\rangle = \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{e^{\hbar\omega_i/kT} - ۱}. \qquad (۳۵.۷)$$

ظرفیت ِ گرمای ِ ویژه‌ی ِ با رابطه‌ی ِ زیر داده می‌شود:

$$C_V(T) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = k \sum_i \frac{(\hbar\omega_i/kT)^2 e^{\hbar\omega_i/kT}}{(e^{\hbar\omega_i/kT} - 1)^2}. \qquad (۳۶.۷)$$

اینشتین به عنوان ِ نخستین کسی که مفاهیم ِ کوانتمی را در نظریه‌ی ِ جامدات به کار گرفت در ۱۹۰۷ برای ِ محاسبه‌ی ِ C_V فرض کرد که همه‌ی ِ مقادیر ِ ω_i با یکدیگر برابراند، $\omega_i = \omega_E$. او به علاوه فرض کرد که تعداد ِ ω_i ها درست برابر ِ $3N$ است که N تعداد ِ اتم‌های ِ بلور است. فرض ِ او بر این مبنا است که دستگاهی که توصیف می‌کنیم هم‌ارز ِ N نوسانگر ِ مشابه است که هرکدام سه درجه‌ی ِ آزادی دارد. بر این اساس

$$C_V = 3NkE(x), \qquad E(x) = \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}, \qquad (۳۷.۷)$$

که $x = \hbar\omega_E/kT = \Theta(E)/T$.

تمرین: Θ_E را تخمین بزنید.

در دمای ِ زیاد $T \gg \Theta_E$، C_V به مقدار ِ کلاسیک ِ آن $C_V = 3Nk$ میل می‌کند. برای ِ $T \ll \Theta_E$، $E(x)$ به صورت ِ نمایی با x کاهش می‌یابد که البته بسیار سریع‌تر از مشاهده‌ی ِ تجربی است. روش ِ دبای به نتیجه‌ی ِ بهتری منجر می‌شود. او در ۱۹۱۲ فرض کرد که ω در بازه‌ی ِ $(0, \omega_D)$ به طور ِ پیوسته مقدار می‌پذیرد و چگالی ِ ترازها با تابعی چون $g(\omega)$ در رابطه‌ی ِ (۲۵.۷) داده می‌شود. برای ِ تعیین ِ $g(\omega)$ او رابطه‌ی ِ (۲۵.۷) را به این شکل اصلاح کرد که برای ِ فونون‌ها دو مد ِ عرضی با سرعت ِ c_T و یک مد ِ طولی با سرعت ِ c_L فرض کرد:

$$g(\omega)d\omega = \left(\frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2 c_L^3} + \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c_T^3}\right), \qquad (۳۸.۷)$$

برای ِ تعیین ِ ω_D او فرض کرد که

$$\int_0^{\omega_D} g(\omega)d\omega = 3N.$$

از این جا می‌شود دید که

$$\omega_D^3 = 18\pi^2 \frac{N}{V} \left(\frac{1}{c_L^3} + \frac{2}{c_T^3} \right)^{-1}, \tag{۳۹.۷}$$

و در نتیجه

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{9N}{\omega_D^3}\omega^2 & \omega \leq \omega_D \\ 0 & \omega > \omega_D. \end{cases} \tag{۴۰.۷}$$

با جای‌گذاری در (۳۶.۷) داریم

$$C_V(T) = 3NkD(x_0), \qquad D(x_0) = \frac{3}{x_0} \int_0^{x_0} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx, \tag{۴۱.۷}$$

که $x_0 = \hbar\omega_D/kT = \Theta_D/T$. Θ_D را دمای ِ دبای ِ جامدات نامیده‌اند. برای ِ $T \gg \Theta_D$ ($x_0 \ll 1$)داریم

$$D(x_0) = 1 - \frac{x_0^2}{20} + \cdots. \tag{۴۲.۷}$$

در نتیجه در حد ِ $T \to \infty$ و در واقع برای ِ $T > 3\Theta_D$ با تقریب ِ خوبی $C_V = 3Nk$. برای ِ $T \ll \Theta_D$ که نظیر ِ $x_0 \gg 1$ است می‌شود با دقت ِ خوبی حد ِ بالای ِ انتگرال در (۴۱.۷) را با $x_0 \to \infty$ جای‌گذاری کرد. آن چه که به دست می آید این است که

$$C_V = Nk \frac{12\pi^4}{5} \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 = 464.4 \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \ cal/mol/K, \tag{۴۳.۷}$$

به این نتیجه قانون ِ T^3 ی ِ دبای می‌گویند که به خوبی با تجربه می‌خواند.

فصل ۸

گاز ایده‌آل فرمی

۸–۱ ترمودینامیک گاز ایده‌آل فرمی

گاز ِ ایده‌آل ِ فرمی با روابط ِ زیر داده می‌شود:

$$\frac{PV}{kT} = \ln \mathcal{L} = \sum_{\epsilon} \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon}), \tag{۱.۸}$$

$$N = \sum_{\epsilon} \langle n_\epsilon \rangle = \sum_{\epsilon} \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon} + 1}, \tag{۲.۸}$$

که $\beta = 1/kT$ و $z = \exp(\mu/kT)$. در این جا z می‌تواند هر مقداری را در بازه‌ی ِ $[0, \infty)$ بپذیرد. در حد ِ $V \to \infty$ می‌توان جمع‌های ِ بالا را با انتگرال تقریب زد و در نتیجه

$$\frac{P}{kT} = \frac{g}{\lambda^3} f_{5/2}(z), \tag{۳.۸}$$

$$\frac{N}{V} = \frac{g}{\lambda^3} f_{3/2}(z). \tag{۴.۸}$$

عامل ِ وزن ِ g در این جا به ساختار ِ داخلی ِ فرمیون‌ها مثل ِ اسپین اشاره دارد. $\lambda = h/(2\pi mkT)^{1/2}$ طول ِ موج ِ میانگین ِ گرمایی است و

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}dx}{z^{-1}e^x + 1}. \tag{۵.۸}$$

معادله‌ی ِ حالت ِ گاز با حل ِ z از معادله‌ی ِ (۴.۸) و جای‌گذاری در معادله‌ی ِ (۳.۸) به دست می‌آید. به آسانی می‌شود دید که

$$U = -\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\mathcal{L}\right)_{z,V} = \frac{۳}{۲}NkT\frac{f_{۵/۲}(z)}{f_{۳/۲}(z)}, \qquad (۶.۸)$$

و در نتیجه

$$PV = \frac{۲}{۳}U. \qquad (۷.۸)$$

می‌شود نشان داد که

$$\frac{C_V}{Nk} = \frac{۱۵}{۴}\frac{f_{۵/۲}(z)}{f_{۳/۲}(z)} - \frac{۹}{۴}\frac{f_{۳/۲}(z)}{f_{۱/۲}(z)}, \qquad (۸.۸)$$

که می‌شود آن را با C_V گاز ِ در دمای ِ $T > T_c$ داده شده در رابطه‌ی ِ (۱۷.۷) مقایسه کرد. برای ِ $z < ۱$ با استفاده از بسط ِ

$$f_n(z) = z - \frac{z^۲}{۲^n} + \frac{z^۳}{۳^n} + \cdots, \qquad (۹.۸)$$

می‌توان نشان داد که[۱]

$$\frac{PV}{NkT} = \sum_{l=۱}^{\infty}(-۱)^{l-۱}a_l\left(\frac{\lambda^۳}{gv}\right)^{l-۱}, \qquad (۱۰.۸)$$

که ضرایب ِ a_l در رابطه‌ی ِ (۱۲.۷) داده شده‌اند. هم‌چنین

$$\begin{aligned} C_V &= \frac{۳}{۲}Nk\sum_{l=۱}^{\infty}(-۱)^{l-۱}\frac{۵-۳l}{۲}a_l\left(\frac{\lambda^۳}{gv}\right)^{l-۱} \\ &= \frac{۳}{۲}\left(۱ - ۰.۰۸۸۴\left(\frac{\lambda^۳}{gv}\right) + ۰.۰۰۶۶\left(\frac{\lambda^۳}{gv}\right)^۲ + \cdots\right). \end{aligned} \qquad (۱۱.۸)$$

که آن را باید با (۱۳.۷) مقایسه کرد.

[۱] از روابط ِ (۴.۸) و (۹.۸) معلوم است که حد ِ $z \ll ۱$ بر حد ِ کلاسیک ِ $v \gg \lambda^۳$ منطبق است.

تراز فرمی

در حد ِ $T \to ۰$ که هم‌ارز ِ $v \gg \lambda^۳$ است محاسبات ِ بالا ناکارآمد هستند. در این حد

$$\langle n_\epsilon \rangle = \frac{۱}{e^{(\epsilon(\vec{p})-\mu)/kT}+۱} = \begin{cases} ۱ & \epsilon(\vec{p}) < \mu_۰, \\ ۰ & \epsilon(\vec{p}) > \mu_۰, \end{cases} \qquad (۱۲.۸)$$

که $\mu_۰$ پتانسیل ِ شیمیایی ِ دستگاه در $T = ۰$ است. می‌بینیم که $\langle n_\epsilon \rangle$ در $T = ۰$ به عنوان ِ تابعی از ϵ، یک تابع ِ پله[۲] است. معنای ِ این نتیجه این است که در $T = ۰$ تمامی ِ ترازهایی که انرژی ِ آن‌ها از $\mu_۰$ کم‌تر است کاملاً پر هستند و ترازهایی که انرژی ِ آن‌ها از $\mu_۰$ بیش‌تر است خالی می‌مانند. به $\mu_۰$ انرژی ِ فرمی می‌گویند و آن را با ϵ_F نمایش می‌دهند. مقدار ِ ϵ_F یا $\mu_۰$ را از رابطه‌ی ِ بدیهی ِ زیر تعیین می‌کنیم،

$$\int_۰^{\epsilon_F} a(\epsilon) d\epsilon = N, \qquad a(\epsilon) = \frac{gV}{h^۳} ۴\pi p^۲ \frac{dp}{d_\epsilon}. \qquad (۱۳.۸)$$

از این جا داریم

$$p_F = \left(\frac{۳N}{۴\pi g V}\right)^{۱/۳} h, \qquad (۱۴.۸)$$

و در نتیجه در حد ِ غیر ِ نسبیتی

$$\mu_۰ = \epsilon_F = \left(\frac{۳N}{۴\pi g V}\right)^{۲/۳} \frac{h^۲}{۲m} = \left(\frac{۶\pi^۲ n}{g}\right)^{۲/۳} \frac{\hbar^۲}{۲m}. \qquad (۱۵.۸)$$

انرژی ِ حالت ِ پایه‌ی ِ گاز $E_۰$ با رابطه‌ی ِ

$$E_۰ = \frac{۴\pi g V}{h^۳} \int_۰^{p_F} \left(\frac{p^۲}{۲m}\right) p^۲ dp = \frac{۲\pi g V}{۵ m h^۳} p_F^۵, \qquad (۱۶.۸)$$

داده می‌شود که به کمک ِ رابطه‌ی ِ (۷.۸) می‌گوید در $T = ۰$ فشار ِ گاز ناصفر است و با رابطه‌ی ِ زیر داده می‌شود،

$$P_۰ = \frac{۲}{۵} n \epsilon_F \sim n^{۵/۳}. \qquad (۱۷.۸)$$

---

[۲] step function

برای ِ به دست آوردن ِ رفتار ِ گاز در دمای ِ محدود ولی نزدیک به صفر که هم‌ارز ِ $z \gg ۱$ است از بسط ِ $f_n(z)$ بر حسب ِ $(\ln z)^{-۱}$ و رابطه‌ی ِ بازگشتی ِ

$$f_{n-۱}(z) = \frac{\partial}{\partial \ln z} f_n(z),$$

می‌شود استفاده کرد،

$$f_{۵/۲}(z) = \frac{۸}{۱۵\pi^{۱/۲}} (\ln z)^{۵/۲} \left[۱ + \frac{۵\pi^۲}{۸} (\ln z)^{-۲} + \cdots \right], \qquad (۱۸.۸)$$

$$f_{۳/۲}(z) = \frac{۴}{۳\pi^{۱/۲}} (\ln z)^{۳/۲} \left[۱ + \frac{\pi^۲}{۸} (\ln z)^{-۲} + \cdots \right], \qquad (۱۹.۸)$$

$$f_{۱/۲}(z) = \frac{۲}{\pi^{۱/۲}} (\ln z)^{۱/۲} \left[۱ - \frac{\pi^۲}{۴} (\ln z)^{-۲} + \cdots \right], \qquad (۲۰.۸)$$

با جای گذاری ِ رابطه‌ی ِ (۱۹.۸) در (۴.۸) داریم

$$\frac{N}{V} = \frac{۴\pi g}{۳} \left(\frac{۲m}{h^۲} \right)^{۳/۲} (kT \ln z)^{۳/۲} \left[۱ + \frac{\pi^۲}{۸} (\ln z)^{-۲} + \cdots \right]. \qquad (۲۱.۸)$$

از این جا می‌شود $\mu = kT \ln z$ را برای ِ $z \gg ۱$ حساب کرد،

$$\mu \simeq \epsilon_F \left[۱ - \frac{\pi^۲}{۱۲} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^۲ \right]. \qquad (۲۲.۸)$$

می‌بینیم که در تقریب ِ مرتبه‌ی ِ صفر نتیجه‌ی ِ بالا با آن‌چه در معادله‌ی ِ (۱۵.۸) برای ِ $T = ۰$ به دست آوردیم یکی است. با جای‌گذاری ِ (۱۸.۸) و (۱۹.۸) در (٦.۸) و با استفاده از (۲۲.۸) می‌شود نشان داد که

$$\frac{U}{N} = \frac{۳}{۵} \epsilon_F \left[۱ + \frac{۵\pi^۲}{۱۲} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^۲ + \cdots \right], \qquad (۲۳.۸)$$

$$P = \frac{۲}{۳} \frac{U}{V}, \qquad (۲۴.۸)$$

$$\frac{C_V}{Nk} = \frac{\pi^۲}{۲} \frac{kT}{\epsilon_F} + \cdots, \qquad (۲۵.۸)$$

$$\frac{S}{Nk} = \frac{\pi^۲}{۲} \frac{kT}{\epsilon_F} + \cdots. \qquad (۲٦.۸)$$

۸–۲ رفتار مغناطیسی گاز ایده‌آل فرمی

در این بخش رفتار ِ گاز ِ ایده‌آل ِ فرمی را در حضور ِ میدان ِ مغناطیسی ِ خارجی بررسی می‌کنیم. این مطالعه شامل ِ بررسی ِ سهم ِ پارامغناطیس ِ پاولی، دیامغناطیس ِ لاندائو و اثر ِ دوهاوس–ون‌آلفن در پذیرفتاری ِ مغناطیسی است.

۸–۲–۱ پارامغناطیس پاولی

انرژی ِ ذرات در حضور ِ میدان ِ مغناطیسی ِ خارجی ِ $\vec{B}$ با

$$\epsilon = \frac{p^۲}{۲m} - \vec{\mu}^*.\vec{B}, \qquad (۲۷.۸)$$

داده می‌شود که $\vec{\mu}^*$ در این‌جا ممان ِ دوقطبی ِ ذاتی ِ ذره و m جرم ِ آن است. برای ِ سادگی فرض کنید که اسپین ِ ذره $\frac{۱}{۲}$ است. در این صورت می‌توانیم ذرات ِ دستگاه را به دو دسته‌ی ِ $S^\pm$ بر حسب ِ راستای ِ $\vec{\mu}^*$ تقسیم کنیم. تعداد ِ ذراتی که ممان ِ دوقطبی ِ ذاتی ِ آن‌ها موازی (پادموازی) با میدان ِ $\vec{B}$ هستند را با N^+ (N^-) نشان می‌دهیم. انرژی ِ ذرات ِ S^+ با $\epsilon = \frac{p^۲}{۲m} - \mu^* B$ و انرژی ِ ذرات ِ S^- با $\epsilon = \frac{p^۲}{۲m} + \mu^* B$ داده می‌شود. می‌دانیم که در دمای ِ $T = ۰$ تمامی ِ ترازهایی که انرژی ِ آن‌ها از ϵ_F یعنی انرژی ِ فرمی کم‌تر است پر و ترازهای ِ دیگر کاملاً خالی هستند. به کمک ِ رابطه‌ی ِ (۱۴.۸) می‌توانیم $N^\pm$ را بر حسب ِ ϵ_F به صورت ِ زیر تعیین کنیم،

$$N^\pm = \frac{۴\pi V}{۳h^۳} \left\{ ۲m(\epsilon_F \pm \mu^* B) \right\}^{۳/۲}. \qquad (۲۸.۸)$$

از این‌جا می‌شود ممان ِ مغناطیسی ِ گاز را به صورت ِ زیر حساب کرد،

$$M = \mu^*(N^+ - N^-) = \frac{۴\pi\mu^* V (۲m)^{۳/۲}}{۳h^۳} \left\{ (\epsilon_F + \mu^* B)^{۳/۲} - (\epsilon_F - \mu^* B)^{۳/۲} \right\}. \qquad (۲۹.۸)$$

و از این نتیجه پذیرفتاری ِ مغناطیسی برای ِ میدان‌های ِ ضعیف به دست می‌آید،

$$\chi_{\circ} = \lim_{B\to\circ}\left(\frac{M}{VB}\right) = \frac{۴\pi\mu^{*۲}(۲m)^{۳/۲}\epsilon_F^{۱/۲}}{h^{۳}}. \qquad (۳۰.۸)$$

تمرین: $\chi_{\circ}$ را تخمین بزنید. به ازای ِ چه مقادیری از B انتظار داریم که اندازه‌ی ِ χ در آزمایش‌گاه با دقت ِ خوبی $\chi_{\circ}$ باشد؟

به کمک ِ رابطه‌ی ِ (۲۷.۸) می‌شود ϵ_F را بر حسب ِ چگالی ِ ذرات $n = \frac{N^{+}+N^{-}}{V}$ حساب کرد که نتیجه‌ی ِ آن در حد ِ $B \to \circ$ با معادله‌ی ِ (۱۵.۸) به ازای ِ $g = ۲$ یکی است. در نتیجه

$$\chi_{\circ} = \frac{۳}{۲}\frac{n\mu^{*۲}}{\epsilon_F}. \qquad (۳۱.۸)$$

تمرین: این نتیجه را با آن چه در فصل ِ ۳ با محاسبه بر پایه‌ی ِ بولتزمانین به دست آمد مقایسه کنید.

در دمای ِ بالا χ_{∞} با قانون ِ کوری داده می‌شود که در فصل ِ ۳ بررسی شد،

$$\chi_{\infty} = \frac{n\mu^{*۲}}{kT}. \qquad (۳۲.۸)$$

در دمای ِ دل‌خواه ِ T وضعیت ِ دستگاه را می‌توان به صورت ِ نقطه‌ی ِ تعادل ِ ترمودینامیکی بین ِ دو دستگاه ِ $S^{\pm}$ یکی شامل ِ ذرات ِ اسپین—بالا و دیگری شامل ِ ذرات ِ اسپین—پایین دانست که با هم گرما و ذره مبادله می‌کنند. در نبود ِ برهم‌کنش با میدان ِ خارجی یعنی اگر ذرات بی‌اسپین بودند نقطه‌ی ِ تعادل ِ ترمودینامیکی با شرط ِ $\mu_{\circ}(\overline{N^{+}}) = \mu_{\circ}(N - \overline{N^{+}})$ داده می‌شود که در این جا $\mu_{\circ}$ پتانسیل ِ شیمیایی ِ دستگاه ِ ذرات ِ بی‌اسپین است که تابعی از تعداد ِ ذرات ِ دستگاه است. برهم‌کنش با میدان ِ خارجی ِ B سبب می‌شود که هر ذره‌ای که از S^{-} به S^{+} می‌رود به اندازه‌ی ِ $۲\mu^{*}B$ اضافه بر اثر ِ پتانسیل ِ شیمیایی انرژی از دست بدهد. پس شرط ِ تعادل ِ ترمودینامیکی این است که

$$\mu_{\circ}(\overline{N^{+}}) - \mu_{\circ}(N - \overline{N^{+}}) = ۲\mu^{*}B. \qquad (۳۳.۸)$$

این نتیجه را می‌شود به طور ِ کمی‌با محاسبه‌ی ِ χ به صورت ِ تابعی از دما به صورت ِ زیر به دست آورد. اگر $n^{\pm}(\vec{p})$ نشان دهنده‌ی ِ تعداد ِ ذراتی باشد که تکانه‌ی ِ آن‌ها $\vec{p}$ است و راستای ِ ممان ِ

دوقطبی ِ مغناطیسی ِ آن‌ها موازی (پادموازی) ِ میدان ِ خارجی ِ B است آن‌گاه انرژی ِ کل ِ گاز با رابطه‌ی ِ زیر داده می‌شود،

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{\vec{p}} \left[\left(\frac{p^2}{2m} - \mu^* B \right) n_{\vec{p}}^+ + \left(\frac{p^2}{2m} + \mu^* B \right) n_{\vec{p}}^- \right] \\ &= \sum_{\vec{p}} \left(n^+ + n^- \right) \frac{p^2}{2m} - \mu^* B \left(N^+ - N^- \right), \end{aligned} \tag{۳۴.۸}$$

تابع ِ پارش ِ دستگاه،

$$Q(N) = \sum_{\{n_{\vec{p}}^\pm\}} \exp(-\beta E_n), \tag{۳۵.۸}$$

که جمع ِ بالا تنها روی ِ آن دسته از $\{n_{\vec{p}}^\pm\}$ها است که

$$n_{\vec{p}}^\pm \in \{0, 1\}, \tag{۳۶.۸}$$

$$\sum_{\vec{p}} n_{\vec{p}}^+ + \sum_{\vec{p}} n_{\vec{p}}^- = N^+ + N^- = N. \tag{۳۷.۸}$$

می‌شود تابع ِ پارش را به این صورت باز نویسی کرد،

$$Q(N) = \sum_{N^+=0}^{N} \left(e^{\beta\mu^* B(2N^+ - N)} \sum_{\{n_{\vec{p}}^+\}} e^{-\beta \sum_{\vec{p}} \frac{p^2}{2m} n_{\vec{p}}^+} \sum_{\{n_{\vec{p}}^-\}} e^{-\beta \sum_{\vec{p}} \frac{p^2}{2m} n_{\vec{p}}^-} \right) \tag{۳۸.۸}$$

$$= e^{-\beta\mu^* BN} \sum_{N^+=0}^{N} \left(e^{2\beta\mu^* BN^+} Q_0(N^+) Q_0(N - N^+) \right). \tag{۳۹.۸}$$

در عبارت ِ بالا

$$Q_0(\mathcal{N}) = \sum_{\{n_{\vec{p}}\}} \exp\left(-\beta \sum_{\vec{p}} \frac{p^2}{2m} n_{\vec{p}} \right) = \exp\left\{ -\beta A_0(\mathcal{N}) \right\},$$

که در آن جمع روی ِ آن دسته از $\{n_{\vec{p}}\}$ها است که در شرط ِ $n_{\{\vec{p}\}} \in \{0, 1\}$ صدق کنند و $\sum_{\vec{p}} n_{\vec{p}} = \mathcal{N}$. در واقع $Q_0(\mathcal{N})$ همان تابع ِ پارش ِ گاز ِ ایده‌آل ِ فرمی شامل ِ $\mathcal{N}$ ذره‌ی ِ بی‌اسپین است. از آن‌جا که

$$M = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial B} \ln Q_N,$$

برای ِ محاسبه‌ی ِ M لازم است $\ln Q(N)$ را حساب کنیم،

$$\frac{۱}{N}\ln Q(N) = -\beta\mu^* B + \frac{۱}{N}\ln \sum_{N^+=۰}^{N} e^{۲\beta\mu^* BN^+ - \beta A_۰(N^+) - \beta A_۰(N-N^+)}. \qquad (۴۰.۸)$$

جمع ِ بالا را به این صورت تقریب می‌زنیم که تنها بزرگترین جمله را در نظر می‌گیریم،

$$\frac{۱}{N}\ln Q(N) = -\beta\mu^* B + \frac{۱}{N}\left(۲\beta\mu^* B\overline{N^+} - \beta A_۰(\overline{N^+}) - \beta A_۰(N-\overline{N^+})\right), \qquad (۴۱.۸)$$

که در آن $\overline{N^+}$ بیشینه‌ی ِ $\{۲\beta\mu^* BN^+ - \beta A_۰(N^+) - \beta A_۰(N-N^+)\}$ در (۴۰.۸) را می‌دهد،

$$۲\mu^* B - \left[\frac{\partial A_۰(N^+)}{\partial N^+}\right]_{N^+=\overline{N^+}} - \left[\frac{\partial A_۰(N-N^+)}{\partial N^+}\right]_{N^+=\overline{N^+}} = ۰, \qquad (۴۲.۸)$$

که چون

$$\mu_۰ = \frac{\partial A_۰(\mathcal{N})}{\partial \mathcal{N}},$$

این معادل ِ رابطه‌ی ِ (۴۲.۸) است. از معادله‌ی ِ (۴۱.۸) نتیجه می‌شود که

$$M = \frac{۱}{\beta}\frac{\partial}{\partial B}\ln Q_N = \mu^*(۲\overline{N^+} - N) = \mu^*(\overline{N^+} - \overline{N^-}). \qquad (۴۳.۸)$$

M را می‌شود بر حسب ِ پارامتر ِ r که با رابطه‌ی ِ $r = \frac{\overline{N^+}-\overline{N^-}}{N}$ تعریف می‌کنیم بنویسیم،

$$M = \mu_۰ N r, \qquad ۰ \le r \le ۱. \qquad (۴۴.۸)$$

مقدار ِ r با رابطه‌ی ِ (۴۲.۸) که آن را به صورت ِ بازنویسی می‌کنیم داده می‌شود،

$$\mu_۰\left(\frac{۱+r}{۲}N\right) - \mu_۰\left(\frac{۱-r}{۲}N\right) = ۲\mu^* B. \qquad (۴۵.۸)$$

چون برای ِ $B = ۰$ $r = ۰$ می‌شود برای ِ میدان‌های ِ ضعیف r را از تقریب ِ زیر حساب کرد،

$$r \simeq \frac{۲\mu^* B}{\left.\frac{\partial\mu_۰(xN)}{\partial x}\right|_{x=\frac{۱}{۲}}}. \qquad (۴۶.۸)$$

از این جا پذیرفتاری ِ مغناطیسی برای ِ میدان‌های ِ ضعیف به دست می‌آید،

$$\chi = \frac{M}{VB} = \frac{\mu^* Nr}{VB} = \frac{۲n\mu^{*۲}}{\left.\frac{\partial \mu_۰(xN)}{\partial x}\right|_{x=\frac{۱}{۲}}}. \qquad (۴۷.۸)$$

برای ِ محاسبه‌ی ِ χ باید $\mu_۰$ را برحسب ِ ϵ_F به دست آورد. مقدار ِ این کمیت‌ها را در بخش ِ قبلی حساب کردیم. در حد ِ $T \to ۰$ برای ِ استفاده از آن نتایج باید دقت کرد که چون ϵ_F انرژی ِ دستگاه ِ اسپینی با اسپین ِ $\frac{۱}{۲}$ است g در معادله‌ی ِ (۱۵.۸) برابر با ۲ است ولی چون $\mu_۰$ پتانسیل ِ شیمیایی ِ دستگاه ِ ذرات ِ بی‌اسپین است برای ِ محاسبه‌ی ِ آن g را باید برابر ِ ۱ بگیریم. پس از کمی محاسبه خواهیم داشت،

$$\chi \simeq \chi_۰ \left[۱ - \frac{\pi^۲}{۱۲}\left(\frac{kT}{\epsilon_F}\right)^۲\right], \qquad \chi_۰ = \frac{۳}{۲}\frac{n\mu^{*۲}}{\epsilon_F}, \qquad (۴۸.۸)$$

که برای ِ $T \to ۰$ با معادله‌ی ِ (۳۱.۸) در توافق است.

تمرین: معادله‌ی ِ (۱۰۴.۸) را به دست آورید.

در $T \to \infty$ از (۴.۸) با جای‌گذاری ِ $g = ۱$ و فرض ِ $f_{۳/۲}(z) \simeq z$ داریم،

$$\mu_۰(xN) = kT \ln\left(\frac{xN\lambda^۳}{V}\right), \qquad (۴۹.۸)$$

و در نتیجه

$$\left.\frac{\partial \mu_۰(xN)}{\partial x}\right|_{x=\frac{۱}{۲}} = ۲kT. \qquad (۵۰.۸)$$

با جای‌گذاری در معادله‌ی ِ (۴۷.۸) به قانون ِ کوری می‌رسیم،

$$\chi_\infty = \frac{n\mu^{*۲}}{kT}, \qquad (۵۱.۸)$$

برای ِ دماهای ِ زیاد از تقریب ِ $f_{۳/۲}(z) \simeq z - \frac{z^۲}{۲^{۳/۲}}$ استفاده می‌کنیم که به اصلاح زیر برای ِ قانون ِ کوری منجر می‌شود،

$$\chi \simeq \chi_\infty \left(۱ - \frac{n\lambda^۳}{۲^{۵/۲}}\right). \qquad (۵۲.۸)$$

۸—۲—۲ دیامغناطیس لاندائو و اثر دوهاوس—ون آلفن

از مکانیک ِ کلاسیک می‌دانیم که در حضور ِ میدان ِ خارجی ذرات ِ باردار برروی ِ مارپیچ‌هایی در راستای ِ میدان با بسامد ِ $\frac{eB}{mc}$ می‌چرخند. در مکانیک ِ کوانتمی می‌شود دید که طیف ِ این ذرات با رابطه‌ی ِ

$$\epsilon(j,p_z)=\frac{p_z^{۲}}{۲m}+\frac{eB\hbar}{mc}(j+\frac{۱}{۲}),\qquad j=۰,۱,۲,\cdots. \tag{۵۳.۸}$$

برای ِ آن که تبهگنی ِ هر تراز را به دست آوریم دقت می‌کنیم که پیش از روشن کردن ِ میدان ِ خارجی ِ B حرکت ِ ذره در صفحه‌ی ِ (x,y) با مرزهای ِ دستگاه که آن را جعبه‌ای به ابعاد ِ (L_x,L_y,L_z) فرض می‌کنیم محدود می‌شد. در نتیجه تعداد ِ ترازهایی که انرژی ِ آن‌ها در بازه‌ی ِ $(\epsilon_۱,\epsilon_۲)$ بود با

$$\frac{L_xL_y}{h^{۲}}\int\int dp_xdp_y=\frac{L_xL_y}{h^{۲}}(۲m\pi)(\epsilon_۲-\epsilon_۱), \tag{۵۴.۸}$$

داده می‌شود. با روشن کردن ِ میدان ِ B در عمل تمامی ِ ترازهایی که در نبود ِ میدان انرژی ِ آن‌ها صرف ِ نظر از p_z در بازه‌ی ِ $(\frac{(j+۱)eB\hbar}{mc},\frac{jeB\hbar}{mc})$ قرار دارد به تراز ِ $\epsilon(j,p_z)$ داده شده در معادله‌ی ِ (۵۳.۸) می‌روند. با جای‌گذاری ِ $\epsilon_۱=\frac{jeB\hbar}{mc}$ و $\epsilon_۲=\frac{(j+۱)eB\hbar}{mc}$ در معادله‌ی ِ (۵۴.۸) نتیجه می‌گیریم که تبهگنی ِ تراز ِ $\epsilon(j,p_z)$ با

$$\frac{L_xL_y}{h^{۲}}\frac{eB}{hc}, \tag{۵۵.۸}$$

داده می‌شود که از j مستقل است. درستی ِ این استدلال را می‌شود به این صورت توجیه کرد که با کم و زیاد کردن ِ B ترازهای ِ انرژی خلق یا فنا نشده و تنها جابه‌جا می‌شوند. چون این رفتار در حد ِ $B\to ۰$ نیز برقرار است و از آن جا که در این حد مسیر ِ حرکت ِ کلاسیک ِ ذرات به طور ِ پیوسته به خط ِ راست و یا در مکانیک ِ کوانتمی به موج ِ تخت نزدیک می‌شود طبیعی است که فرض کنیم تعداد ِ ترازها برای ِ $B\neq ۰$ با $B=۰$ برابر است. ریشه‌ی ِ این تبهگنی هم در این است که اگر ابعاد ِ

ظرف بی‌نهایت بود ($L_{x(y)} \to \infty$) آن‌گاه

$$\epsilon(j,p_z) = \tilde{\epsilon}(n_r,m) + \frac{p_z^2}{2m}, \qquad \tilde{\epsilon}(n_r,m) = \frac{eB\hbar}{mc}\left(n_r + m + |m| + \frac{1}{2}\right), \qquad (۵۶.۸)$$

که در آن $n_r = 0,1,2,\cdots$ عدد ِ کوانتمی ِ مربوط به حرکت ِ شعاعی و $m = 0,\pm1,\pm2,\cdots$ عدد ِ کوانتمی است که تکانه‌ی ِ زاویه‌ای $l_z = m\hbar$ را می‌دهد. در نتیجه تبهگنی در حد ِ $L_{x(y)} \to \infty$ بی‌نهایت است[۳] که البته با معادله‌ی ِ (۵۵.۸) سازگار است. در این جا ابعاد ِ دستگاه محدود است و در نتیجه تبهگنی هم محدود است ولی هم‌چنان می‌شود با دقت ِ خوبی ترازها را با معادله‌ی ِ (۵۳.۸) داد.

در نتیجه تابع ِ پارش ِ بزرگ با رابطه‌ی ِ زیر داده می‌شود،

$$\begin{aligned} \ln\mathcal{L} &= \sum_{\epsilon} \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_z dp_z}{h}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\left(L_xL_y\frac{eB}{hc}\right)\ln\left\{1 + ze^{-\beta e\hbar B(j+\frac{1}{2})/mc}e^{-\beta p_z^2/2m}\right\}\right] \qquad (۵۷.۸) \end{aligned}$$

دیامغناطیس لاندائو

برای ِ $z \ll 1$، با استفاده از تقریب ِ $\ln(1+x) = x$، داریم،

$$\ln\mathcal{L} = \frac{zVeB}{h^2c}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{1/2}\left\{2\sinh\left(\frac{\beta e\hbar B}{2mc}\right)\right\}^{-1}. \qquad (۵۸.۸)$$

از اتحادهای ِ

$$\bar{N} = \left(z\frac{\partial}{\partial z}\ln\mathcal{L}\right)_{B,V,T}, \qquad (۵۹.۸)$$

$$M = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial B}\ln\mathcal{L}\right)_{z,V,T}, \qquad (۶۰.۸)$$

[۳] این تبهگنی با تعداد ِ زوج‌های ِ (n_r,m) که شرط ِ $j = n_r + m + |m|$ را برآورده می‌کند داده می‌شود.

به دست می‌آید که،

$$\bar{N} = \frac{zV}{\lambda^{۳}}\frac{x}{\sinh x}, \tag{۶۱.۸}$$

$$M = \frac{zV}{\lambda^{۳}}\mu\left\{\frac{۱}{\sinh x} - \frac{x\cosh x}{\sinh^{۲} x}\right\}, \tag{۶۲.۸}$$

که در آن $\mu = eh/۴\pi mc$ و $x = \beta\mu B$. اگر e و m بار و جرم ِ الکترون باشند آن‌گاه μ همان مگنتون ِ بور است. از معادله‌های ِ بالا نتیجه می‌شود که

$$M = -\bar{N}\mu L(x), \tag{۶۳.۸}$$

که $L(x) = \coth x - \frac{۱}{x}$ تابع ِ لانژوین است. پس برای ِ $z \ll ۱$ نتیجه با آن‌چه در نظریه‌ی ِ لانژوین برای ِ پارامغناطیس در فصل ِ ۳ به دست آوردیم شبیه است. علامت ِ منفی در عبارت ِ بالا در مقایسه با رابطه‌ی ِ (۵.۳) نشان می‌دهد که پدیده‌ی ِ حاضر دیامغناطیس است. برای ِ $x \ll ۱$ یعنی وقتی $\mu B \ll kT$ معادلات ِ (۶۱.۸) و (۶۲.۸) به این شکل ساده می‌شوند،

$$\bar{N} \simeq \frac{zV}{\lambda^{۳}}, \tag{۶۴.۸}$$

$$M \simeq -\frac{\bar{N}\mu^{۲}B}{۳kT}. \tag{۶۵.۸}$$

از رابطه‌ی ِ (۶۵.۸) دو نتیجه برای ِ پذیرفتاری ِ مغناطیسی ِ

$$\chi_{\infty} = \frac{M}{VB} = -\frac{\bar{n}\mu^{۲}}{۳kT}, \tag{۶۶.۸}$$

ناشی از حرکت ِ مداری ِ ذرات ِ باردار به دست می‌آید: دیامغناطیس بودن ِ این پدیده از علامت ِ بار ِ الکتریکی ِ ذرات مستقل است و χ_{∞} از قانون ِ کوری پیروی می‌کند. پس برای ِ $z \ll ۱$ و در حد ِ میدان‌های ِ ضعیف با استفاده از معادلات ِ (۱۰۴.۸) و (۳۲.۸) داریم،

$$\chi_{\infty} = \frac{n(\mu_B^{۲} - \frac{۱}{۴}\mu'^{۲}_B)}{kT}. \tag{۶۷.۸}$$

$\mu'_B = eh/۴\pi m'c$ که m' جرم ِ موثر ِ الکترون در دستگاه ِ مورد ِ بررسی است. هم‌چنین در رابطه‌ی ِ (۳۲.۸) μ^* را همان مگنتون ِ بور گرفته‌ایم.

برای ِ به دست آوردن ِ پذیرفتاری در دماهای ِ کم $kT \ll \epsilon_F$ که هم‌ارز ِ $z \gg ۱$ است و در حد ِ میدان‌های ِ بسیار ضعیف $\mu B \ll kT$ معادله‌ی ِ (۵۷.۸) را با استفاده از تقریب ِ اویلر

$$\sum_{j=۰}^{\infty} f\left(j+\frac{۱}{۲}\right) \simeq \int_{۰}^{\infty} f(x)dx + \frac{۱}{۲۴} f'(۰), \qquad (۶۸.۸)$$

حساب می‌کنیم.

تمرین: محدوده‌ی ِ برقراری ِ فرض‌های ِ بالا برای ِ مقادیر ِ B و T را به دست آورید.

جمله‌ی ِ اول در سمت ِ راست ِ معادله‌ی ِ (۶۸.۸) با جمله‌ی ِ آشنای ِ

$$\frac{۲\pi V(۲m)^{۳/۲}}{h^{۳}} \int_{۰}^{\infty} (\epsilon^{۱/۲} d\epsilon) \ln\{۱ + ze^{-\beta\epsilon}\},$$

مساوی است که سهمی در پذیرفتاری ندارد. جمله‌ی ِ دوم برابر است با

$$-\frac{۱}{۱۲}\beta\mu B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{z^{-۱}e^{\beta p_z^{۲}/۲m}+۱} = -\frac{\pi V(۲m)^{۳/۲}}{۶h^{۳}} (\mu B)^{۲} \beta^{۱/۲} \int_{۰}^{\infty} \frac{y^{-۱/۲}dy}{z^{-۱}e^{y}+۱}. \qquad (۶۹.۸)$$

سهم ِ این جمله در پذیرفتاری با رابطه‌ی ِ زیر داده می‌شود که بیانگر ِ دیامغناطیس است. پس از کمی محاسبه و استفاده از چند تقریب ِ مناسب خواهیم دید،

$$\chi_{۰} = -\frac{۱}{۲}\frac{n\mu^{۲}}{\epsilon_F}, \qquad (۷۰.۸)$$

که باید آن را با پارامغناطیس ِ (۳۱.۸) مقایسه کرد.

اثر دوهاوس—ون آلفن

این بخش را با مرور ِ اثر ِ دوهاوس—ون آلفن به پایان می‌بریم. این اثر به رفتار ِ تناوبی ِ پذیرفتاری ِ مغناطیسی برحسب ِ $\frac{۱}{B}$ گفته می‌شود که در محدوده‌ی ِ $\mu B \approx kT \ll \epsilon_F$ دیده می‌شود. با فرض ِ برقراری ِ شرط‌های ِ بالا می‌شود نشان داد که

$$\ln \mathcal{L} \simeq -V \frac{۲(۲\pi m)^{۳/۲}}{h^{۳}} \frac{(\mu B)^{۳/۲}}{\pi^{۱/۲}} \sum_{l=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{l}}{l^{۳/۲}} \frac{\cos\{(l\pi\epsilon_F/\mu B) - \pi/۴\}}{\sinh\{\pi^{۲} l/\beta\mu B\}}. \qquad (۷۱.۸)$$

از نتیجه‌ی ِ بالا می‌شود دید که رفتار ِ تناوبی در حد ِ $\mu B \ll kT$ دیده نمی‌شود و بیشترین اثر زمانی است که $\mu B \approx \pi^۲ kT$.

تمرین: مقادیر ِ T و B را که در آن اثر ِ دوهاوس—ون آلفن دیده می‌شود را تخمین بزنید.

برای ِ به دست آوردن ِ پذیرفتاری،

$$\chi = \frac{۱}{\beta V B} \frac{\partial}{\partial B} \ln \mathcal{L}, \qquad (۷۲.۸)$$

دقت می‌کنیم که بیشترین سهم مربوط به جمله‌ی ِ کسینوسی در صورت ِ کسر در معادله‌ی ِ (۷۱.۸) است. با در نظر گرفتن ِ تنها این جمله خواهیم داشت،

$$\chi = \pi \frac{۳ n \mu^۲}{۲ \epsilon_F} \frac{kT \epsilon_F^{۱/۲}}{(\mu B)^{۳/۲}} \frac{\sin\{(\pi \epsilon_F / \mu B) - \pi/۴\}}{\sinh\{\pi^۲ / \beta \mu B\}}. \qquad (۷۳.۸)$$

در آزمایشگاه اثر ِ دوهاوس—ون آلفن برای ِ تعیین ِ ϵ_F به کار می‌رود.

۸—۳ گاز الکترونی در فلزات

رفتار ِ گاز ِ الکترونی در یک فلز را می‌شود به خوبی با رفتار ِ فرمیون‌های ِ بی‌برهم‌کنش در چاه ِ پتانسیلی به عمق ِ W تقریب زد که ناشی از برهم‌کنش ِ یون‌ها با گاز ِ الکترونی است. در دمای ِ زیاد یا زمانی که امواج ِ الکترومغناطیسی به بلور می‌تابند انرژی ِ سهم ِ قابل ِ مشاهده‌ای از الکترون‌ها آن قدر هست که از این چاه خارج شوند. در این بخش آمار ِ کوانتمی را که برای ِ دستگاه‌های ِ در حال ِ تعادل آموخته‌ایم برای ِ بررسی ِ این دو پدیده به کار می‌گیریم. روشن است که این نتایج تا آن جا درست است که تعداد ِ الکترون‌هایی که فلز را ترک کرده‌اند در برابر ِ آن ها که مانده‌اند ناچیز باشد.

۸—۳—۱ جریان ترمویونیک

تعداد ِ الکترون‌هایی که از واحد ِ سطح ِ فلز در واحد ِ زمان خارج می‌شوند از رابطه‌ی ِ

$$R = \frac{۱}{۴} n \langle u_z \rangle ,$$

به دست می‌آید که

$$\langle u_z \rangle = \frac{1}{N} \int \langle n(\vec{p}) \rangle \, u_z \left(\frac{V d^3 p}{h^3} \right), \qquad (74.8)$$

و

$$\langle n \rangle = \frac{1}{z^{-1} e^{\epsilon/kT} + 1}.$$

در نتیجه

$$R = \int_{p_z=(2mW)^{1/2}}^{\infty} \int_{p_x=-\infty}^{\infty} \int_{p_y=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2 dp_x dp_y dp_z}{h^3} \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1} \right) u_z. \qquad (75.8)$$

پس از کمی محاسبه خواهیم دید که

$$R = \frac{4\pi mkT}{h^3} \int_W^{\infty} d\epsilon_z \ln \left[1 + e^{(\mu-\epsilon_z)/kT} \right]. \qquad (76.8)$$

به آسانی می شود دید که در دمای ِ معمولی جمله‌ی ِ نمایی در سمت ِ راست ِ تساوی ِ بالا عدد ِ کوچکی است و در نتیجه می‌شود با دقت ِ خوبی R را با استفاده از تقریب ِ $\ln(1+x) \simeq x$ محاسبه کرد،

$$R = \frac{4\pi mk^2 T^2}{h^3} e^{(\mu-W)/kT}, \qquad (77.8)$$

و از این جا جریان ِ ترمویونیک $J = eR$ به دست می‌آید. البته پیش از سنجش ِ درستی ِ این نتیجه با آزمایش باید آن را کمی اصلاح کرد. به طور ِ کلاسیک ذره‌ای که با انرژی ِ کافی برای ِ عبور از سد ِ پتانسیل ِ یونی به مرز ِ پتانسیل (همان سطح ِ فلز) می‌رسد با احتمال ِ r که می‌شود آن را به کمک ِ مکانیک ِ کوانتمی حساب کرد بازتابیده می‌شود. در نتیجه تعداد ِ الکترون‌هایی که از واحد ِ سطح ِ فلز در واحد ِ زمان خارج می‌شوند با $(1-r)R$ داده می‌شود.

در آمار ِ کلاسیک که نظیر ِ به کارگیری ِ تقریب ِ $f_{3/2}(z) \simeq z$ است پتانسیل ِ شیمیایی با رابطه‌ی ِ

$$z = e^{\mu/kT} = \frac{n\lambda^3}{g} = \frac{nh^3}{2(2\pi mkT)^{3/2}}, \qquad (78.8)$$

داده می شود و در نتیجه

$$J_{class} = ne\left(\frac{k}{۲\pi m}\right)^{۱/۲} T^{۱/۲} e^{-\phi/kT} \qquad (\phi = W), \tag{۷۹.۸}$$

که همان است که ریچاردسن در ۱۹۰۲ به دست آورد. ازاین‌رو به پدیده‌ی ِ جریان ِ ترمویونیک اثر ِ ریچاردسن می‌گویند. در آمار ِ کوانتمی می‌شود مقدار ِ پتانسیل ِ شیمیایی در دماهای ِ معمولی همان مقدار ِ $\mu_۰ = \epsilon_F$ مربوط به دمای ِ $T = ۰$ گرفت و در نتیجه

$$J_{FD} = \frac{۴\pi mek^۲}{h^۳} T^۲ e^{-\phi/kT} \qquad (\phi = W - \epsilon_F). \tag{۸۰.۸}$$

به ϕ تابع ِ کار می گویند که براساس ِ معادله‌ی ِ (۸۰.۸) عمق ِ چاه ِ پتانسیل تا سطح ِ دریای ِ فرمی را می‌دهد.

این نتیجه را فن لا von Laue در ۱۹۱۹ به روش ِ دیگری به دست آورد. ایده‌ی ِ اصلی بررسی ِ تعادل ِ بین ِ گاز ِ الکترونی ِ فلز و ابر ِ الکترونی تشکیل شده در نزدیکی ِ سطح ِ فلز است. اگر R' تعداد ِ الکترون‌هایی باشد که از واحد ِ سطح ِ فلز در واحد ِ زمان به آن وارد می‌شوند آن‌گاه وضعیت ِ تعادل با $R = R'$ داده می‌شود. برای ِ محاسبه‌ی ِ R' به خوبی می‌شود از تقریب‌های ِ کلاسیک بهره گرفت چرا که چگالی ِ ابر ِ الکترونی اندک است،

$$R' = \frac{۱}{۴} n\langle u\rangle = \frac{۱}{۴}\frac{P}{kT}\left(\frac{۸kT}{\pi m}\right)^{۱/۲}. \tag{۸۱.۸}$$

فشار ِ گاز با رابطه‌ی ِ (۳.۸) و با جای‌گذاری ِ $f_{۵/۲}(z) \simeq z$ داده می‌شود،

$$P = \frac{۲kT(۲\pi mkT)^{۳/۲}}{h^۳} e^{\mu'/kT}. \tag{۸۲.۸}$$

μ' پتانسیل ِ شیمیایی ِ ابر ِ الکترونی است که در نقطه‌ی ِ تعادل با $\mu' = \mu - W$ داده می شود. پس

$$R' = \frac{۴\pi m(kT)^۲}{h^۳} e^{(\mu - W)/kT}. \tag{۸۳.۸}$$

۸–۳–۲ اثر فوتوالکتریک

اثر ِ فوتوالکتریک به پدیده‌ی ِ انتشار ِ الکترون‌ها از سطح ِ فلز در اثر ِ تابش ِ امواج ِ الکترومغناطیسی می‌گویند. فرض کنید که الکترونی فوتونی به بسامد ِ ν را جذب کند. شرط ِ آن که این الکترون بتواند از چاه ِ پتانسیل فرار کند (البته با این فرض که تکانه‌ی ِ الکترون در راستاهای ِ دیگر با جذب ِ فوتون تغییر نمی‌کند) این است که

$$\frac{p_z^۲}{۲m} + h\nu > W. \qquad (۸۴.۸)$$

با تکرار ِ آن چه در به دست آوردن ِ جریان ِ ترمویونیک کردیم به عوض ِ معادله‌ی ِ (۷۶.۸) خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} R &= \frac{۴\pi mkT}{h^۳}\int_{W-h\nu}^{\infty} d\epsilon_z \ln\left[۱ + e^{(\mu-\epsilon_z)/kT}\right] \\ &= \frac{۴\pi m(kT)^۲}{h^۳}\int_۰^{\infty} dx \ln\left[۱ + \exp\left\{\frac{h(\nu-\nu_۰)}{kT} - x\right\}\right], \qquad (۸۵.۸) \end{aligned}$$

که در آن $x = (\epsilon_z - W + h\nu)/kT$ و

$$h\nu_۰ = W - \mu \simeq W - \epsilon_F = \phi.$$

به $\nu_۰$ بسامد ِ آستانه برای ِ بروز ِ پدیده ِ فوتوالکتریک می‌گویند. با استفاده از تعریف ِ

$$\delta = \frac{h(\nu-\nu_۰)}{kT},$$

و پس از انتگرال‌گیری ِ جزء به جزء،

$$\int_۰^{\infty} dx \ln(۱ + e^{\delta - x}) = \int_۰^{\infty} dx \frac{x dx}{۱ + e^{\delta - x}} = f_۲(e^{\delta}), \qquad (۸۶.۸)$$

چگالی ِ جریان ِ فوتوالکتریک را برحسب ِ تابع ِ $f_۲(e^{\delta})$ به دست می‌آوریم،

$$J = \frac{۴\pi emk^۲}{h^۳} T^۲ f_۲(e^{\delta}). \qquad (۸۷.۸)$$

اگر $h(\nu-\nu_{\circ}) \gg kT$ آن‌گاه $e^{\delta} \gg ۱$ و در نتیجه با دقت ِ خوبی $f_{۲}(e^{\delta}) \simeq \frac{\delta^{۲}}{۲}$. در نتیجه

$$J \simeq \frac{۲\pi me}{h}(\nu-\nu_{\circ})^{۲}, \qquad (۸۸.۸)$$

که از دما مستقل است. از سوی ِ دیگر اگر $\nu < \nu_{\circ}$ و $h\,|\nu-\nu_{\circ}| \gg kT$ آن‌گاه $e^{\delta} \ll ۱$ و با تقریب ِ خوبی $f_{۲}(e^{\delta}) \simeq e^{\delta}$. ازاین‌رو

$$J \simeq \frac{۴\pi mek^{۲}}{h^{۳}}T^{۲}e^{(h\nu-\phi)/kT}, \qquad (۸۹.۸)$$

که شبیه ِ معادله‌ی ِ (۸۰.۸) است. در بسامد ِ $\nu = \nu_{\circ}$

$$f_{۲}(e^{\delta}) = f_{۲}(۱) = \frac{۱}{۲}\zeta(۲) = \frac{\pi^{۲}}{۱۲},$$

و در نتیجه

$$J_{\circ} = \frac{\pi^{۳}mek^{۲}}{۳h^{۳}}T^{۲} \qquad (۹۰.۸)$$

۸—۴ تعادل آماری کوتوله‌های سفید

کوتوله‌های ِ سفید ستاره‌هایی هستند که عمدتاً از هلیوم تشکیل شده‌اند. منبع ِ انرژی ِ آن‌ها گرمایی است که از انقباض ِ تدریجی ِ آن‌ها حاصل می‌شود. این روشی است که کلوین در ۱۸۶۱ برای ِ تولید ِ انرژی در همه‌ی ِ ستاره‌ها پیشنهاد داد. جرم ِ نوعی ِ کوتوله‌ها $M \approx ۱۰^{۳۳}g$، چگالی‌شان $\rho \approx ۱۰^{۷}g\ cm^{-۳}$ و دمایی در حدود ِ $T \approx ۱۰^{۷}K$ دارند. در این دما تمامی ِ اتم‌های ِ هلیوم یونیده هستند و ما می‌توانیم ستاره را ترکیبی از N الکترون و $N/۲$ هسته‌ی ِ هلیوم بدانیم. با تقریب ِ $M \simeq ۲Nm_p$، چگالی ِ الکترون‌ها

$$n = \frac{N}{V} \simeq \frac{\rho}{۲m_p},$$

به دست می‌آید. از رابطه‌ی (۱۴.۸) با $g = ۲$ داریم،

$$p_F = \left(\frac{۳n}{۸\pi}\right)^{۱/۳} h = \mathcal{O}(۱۰^{-۱۷}) g\ cm\ sec^{-۱}, \qquad (۹۱.۸)$$

که با تکانه‌ی مشخصه‌ی mc قابل مقایسه است. انرژی فرمی $\epsilon_F = \mathcal{O}(۱۰^{۶}) eV$ هم با $mc^{۲}$ قابل مقایسه است. نکته‌ی مهم این است که $T_F = \epsilon_F/k = \mathcal{O}(۱۰^{۱۰}) K$ و در نتیجه $T/T_F \approx ۱۰^{-۳}$. پس به خوبی می‌شود رفتار آماری گاز الکترونی با دمای $T \approx ۱۰^{۷} K$ را با آمار فرمیون‌ها در $T = ۰$ داد! با مطالعه‌ی این گاز دست کم رفتار کیفی کوتوله‌های سفید برای مان روشن می‌شود. یکی از سؤالاتی که می‌شود به این طریق به آسانی به آن پاسخ داد رابطه‌ی جرم و شعاع کوتوله است که از بررسی تعادل بین فشار گاز و جاذبه‌ی گرانشی ستاره به دست می‌آید.

ویژگی‌های حالت پایه‌ی گاز فرمی شامل N الکترون نسبیتی ($g = ۲$) از این قرار است. رابطه‌ی پاشندگی با

$$\epsilon = mc^{۲} \left[\left\{ ۱ + \left(\frac{p}{mc}\right)^{۲} \right\}^{۱/۲} - ۱ \right], \qquad (۹۲.۸)$$

و سرعت ذرات با

$$u = \frac{d\epsilon}{dp} = c \frac{(p/mc)}{\{۱ + (p/mc)^{۲}\}^{۱/۲}}, \qquad (۹۳.۸)$$

داده می‌شود. انرژی کل گاز عبارت است از

$$E_{۰} = N \langle \epsilon \rangle_{۰} = \frac{۸\pi V}{h^{۳}} \int_{۰}^{p_F} mc^{۲} \left[\left\{ ۱ + (p/mc)^{۲} \right\}^{۱/۲} - ۱ \right] p^{۲} dp, \qquad (۹۴.۸)$$

و فشار گاز

$$P_{۰} = \frac{۱}{۳} \frac{N}{V} \langle pu \rangle_{۰} = \frac{۸\pi}{۳h^{۳}} \int_{۰}^{p_F} mc^{۲} \frac{(p/mc)^{۲}}{\{۱ + (p/mc)^{۲}\}^{۱/۲}} p^{۲} dp. \qquad (۹۵.۸)$$

با کمی محاسبه می‌شود نشان داد که

$$N = \frac{8\pi V m^3 c^3}{3h^3} x^3, \qquad (96.8)$$

$$E_0 = \frac{\pi V m^4 c^5}{3h^3} B(x), \qquad (97.8)$$

$$P_0 = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} A(x), \qquad (98.8)$$

که

$$x = \frac{p_F}{mc} = \left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{1/3} \frac{h}{mc}, \qquad (99.8)$$

$$A(x) = x(x^2+1)^{1/2}(2x^2-3) + 3\sinh^{-1} x, \qquad (100.8)$$

$$B(x) = 8x^3\{(x^2+1)^{1/2} - 1\} - A(x) \qquad (101.8)$$

چاندراسکار در ۱۹۳۹ مقدار ِ توابع ِ $A(x)$ و $B(x)$ را در جدولی برحسب ِ x ارایه داد. می‌شود دید که

$$\lim_{x\to 0} \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{2}{3}$$
$$\lim_{x\to \infty} \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{1}{3}$$

که نظیر ِ حد ِ غیر ِ نسبیتی و فرانسبیتی است. فرض می‌کنیم که کوتوله کره‌ای به شعاع ِ R باشد و فشار ِ گاز در سراسر ِ آن یکسان باشد. شرط ِ تعادل آن است که

$$P_0 = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{GM^2}{R^4}, \qquad (102.8)$$

که α ضریبی از مرتبه‌ی ِ یک است که به چگونگی ِ توزیع ِ جرم ِ ستاره مربوط می‌شود. از رابطه‌ی ِ (۳۹.۸) و با جای‌گذاری ِ

$$x = \left(\frac{9\pi M}{8 m_p}\right)^{1/3} \frac{\hbar/mc}{R}, \qquad (103.8)$$

در نقطه‌ی ِ تعادل خواهیم داشت،

$$A\left(\left\{\frac{9\pi M}{8 m_p}\right\}^{1/3} \frac{\hbar/mc}{R}\right) = 6\pi\alpha \left(\frac{\hbar/mc}{R}\right)^3 \frac{GM^2/R}{mc^2}. \qquad (104.8)$$

به این نتیجه رابطه‌ی ِ جرم و شعاع ِ کوتوله‌ی ِ سفید می‌گویند. می‌بینیم که در این رابطه جرم ِ ستاره با جرم ِ پروتون، شعاع ِ ستاره با طول ِ موج ِ کامپتون ِ الکترون و انرژی ِ گرانشی ِ آن با جرم ِ سکون ِ مقایسه می‌شود.

با استفاده از مقادیر ِ عددی که در اختیار داریم می‌شود دید که اگر شعاع ِ کوتوله $R \approx ۱۰^۸ cm$ آن‌گاه $x \approx ۱$. ما در این‌جا به دو حد ِ $R \gg ۱۰^۸ cm$ و $R \ll ۱۰^۸ cm$ می‌پردازیم.

آ. اگر $R \gg ۱۰^۸ cm$ آن‌گاه $x \ll ۱$ و در نتیجه $A(x) \simeq \frac{۸}{۵} x^۵$. در نتیجه

$$R \simeq \left(\frac{۳(۹\pi)^{۲/۳}}{۴۰\alpha} \frac{\hbar^۲}{G m m_p^{۵/۳}} \right) M^{-۱/۳}. \qquad (۱۰۵.۸)$$

ب. اگر $R \ll ۱۰^۸ cm$ آن‌گاه $x \gg ۱$ و در نتیجه $A(x) \simeq ۲x^۴ - ۲x^۲$. پس

$$R \simeq \frac{(۹\pi)^{۱/۳}}{۲} \frac{\hbar}{mc} \left(\frac{M}{m_p} \right)^{۱/۳} \left\{ ۱ - \left(\frac{M}{M_\circ} \right)^{۲/۳} \right\}^{۱/۲}, \qquad (۱۰۶.۸)$$

که در آن

$$M_\circ = \frac{۹}{۶۴} \left(\frac{۳\pi}{\alpha^۳} \right)^{۱/۲} \frac{(\hbar c/G)^{۳/۲}}{m_p^۲}. \qquad (۱۰۷.۸)$$

تمرین: $M_\circ$ را با جرم ِ خورشید مقایسه کنید.

آن چه در این جا می‌آموزیم این است که نخست هرچه جرم ِ کوتوله بیشتر باشد اندازه‌اش کوچک‌تر است. دوم جرم ِ کوتوله از $M_\circ$ نمی‌تواند بیشتر باشد که با مشاهده می‌خواند. در واقع اگر جرم ِ ستاره از $M_\circ$ بیشتر باشد اصل ِ طرد پاؤلی دیگر نمی‌تواند جلوی ِ رمبش ِ ستاره را بگیرد. مقدار ِ درست $M_\circ$ حدود ِ ۱.۴۴ برابر ِ جرم ِ خورشید است که به آن حد ِ چاندراسکار می‌گویند.

۸–۵ مدل آماری اتم

در این بخش ِ پایانی مدل ِ توماس–فرمی Thomas (۱۹۲۷) Fermi (۱۹۲۸) برای ِ اتم‌های ِ سنگین را مطالعه می‌کنیم. این مدل با کمی اصلاح با موفقیت برای ِ بررسی ِ مولکول‌ها، هسته‌ی ِ اتم‌ها و بلورها به کار رفته است. فرض ِ اساسی در این مدل این است که الکترون‌های یک اتم ِ سنگین را می‌شود گاز ِ فرمیونی ِ کاملاً تبهگن دانست. ازاین‌رو تکانه‌ی ِ هر الکترون از p_F کم‌تر است که با رابطه‌ی ِ زیر داده می‌شود،

$$p_F = (۳\pi^۲ n)^{۱/۳}\hbar. \qquad (۱۰۸.۸)$$

توزیع ِ ذرات در این مسأله یک‌نواخت نیست و چگالی $n(\vec{r})$ تابع ِ صریحی از مکان $\vec{r}$ است. پس حد ِ بالای ِ تکانه یعنی p_F تابعی از مکان است. این توصیف به روشنی نیمه کلاسیک است و زمانی درست است که طول ِ موج ِ دوبروی ِ الکترون‌ها بسیار کوچک‌تر از فواصلی باشد که در آن $n(\vec{r})$ به طور ِ قابل ِ ملاحظه‌ای تغییر می‌کند. این شرط در اتم‌های ِ سنگین برقرار است.

انرژی ِ یک الکترون در بالای ِ دریای ِ فرمی در هر نقطه‌ی ِ $\vec{r}$ با

$$\epsilon(\vec{r}) = \frac{p_F^۲(\vec{r})}{۲m} - e\phi(\vec{r}). \qquad (۱۰۹.۸)$$

مرز ِ دستگاه با $p_F = ۰$ داده می‌شود. با فرض ِ تقارن ِ کروی می‌شود پتانسیل ِ ϕ را طوری اختیار کرد که در مرز $\phi(r) = ۰$. شرط ِ ایستایی ِ دستگاه این است که انرژی مقداری ثابت و مستقل از مکان باشد. از آن جا که در مرز $\epsilon =$ نتیجه می‌گیریم که دستگاه ایستا با شرط ِ زیر داده می‌شود،

$$\frac{p_F^۲(\vec{r})}{۲m} - e\phi(\vec{r}) = ۰. \qquad (۱۱۰.۸)$$

از طرف ِ دیگر در دستگاه ِ ایستا $\phi(\vec{r})$ در معادله‌ی ِ پواسون صدق می‌کند،

$$\nabla^۲\phi(\vec{r}) = ۴\pi e n(\vec{r}). \qquad (۱۱۱.۸)$$

از رابطه‌ی ِ (۱۰۸.۸) و دو معادله‌ی ِ بالا نتیجه می‌شود که

$$\nabla^{۲}\phi(\vec{r}) = \frac{۴e(۲me)^{۳/۲}}{۳\pi\hbar^{۳}}\{\phi(\vec{r})\}^{۳/۲}. \qquad (۱۱۲.۸)$$

که چون فرض کرده‌ایم تقارن ِ کروی برقرار است که معادله‌ی ِ زیر که معروف به معادله‌ی ِ توماس–فرمی است ساده می‌شود،

$$\frac{۱}{r^{۲}}\frac{d}{dr}\left\{r^{۲}\frac{d}{dr}\phi(r)\right\} = \frac{۴e(۲me)^{۳/۲}}{۳\pi\hbar^{۳}}\{\phi(\vec{r})\}^{۳/۲}. \qquad (۱۱۳.۸)$$

با تعریف ِ متغیرهای ِ بی‌بعد ِ

$$x = ۲\left(\frac{۴}{۳\pi}\right)^{۲/۳} Z^{۱/۳}\frac{me^{۲}}{\hbar^{۲}}r, \qquad (۱۱۴.۸)$$

$$\Phi(x) = \frac{\phi(r)}{Ze/r}, \qquad (۱۱۵.۸)$$

که Z عدد ِ اتمی است، معادله‌ی ِ (۱۱۳.۸) به صورت ِ زیر ساده می‌شود،

$$\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}\Phi(x) = \frac{\Phi(x)^{۳/۲}}{x^{۱/۲}}. \qquad (۱۱۶.۸)$$

در مرز که برای ِ سادگی می‌شود فرض کرد که در بی‌نهایت است $\Phi(x_{۰}) = ۰$ و از آن جا که در حد ِ $r \to ۰$، $\phi(r) \to Ze/r$ نتیجه می‌گیریم که $\Phi(۰) = ۱$. با این دو شرط می‌شود $\Phi(x)$ را حل کرد. برای ِ $x \ll ۱$،

$$\Phi(x) = ۱ - ۱.۵۸۸۶x + \frac{۴}{۳}x^{۳/۲} + \cdots. \qquad (۱۱۷.۸)$$

زمرفلد در ۱۹۳۲ برای ِ $x > ۱۰$ نشان داد،

$$\Phi(x) \simeq \left\{۱ + \left(\frac{x^{۳}}{۱۴۴}\right)^{\lambda}\right\}^{-۱/\lambda}, \qquad \lambda \simeq ۰.۲۵۷. \qquad (۱۱۸.۸)$$

در ۱۹۳۱ بوش Bush و کالدول Caldwell با محاسبه‌ی ِ عددی نشان دادند که $\Phi(x)$ تابعی نزولی است و مقدار ِ آن را به دست آوردند.

برای ِ به دست آوردن ِ انرژی ِ بستگی ِ اتم باید انرژی ِ کل ِ گاز الکترونی را به دست آوریم که شامل ِ سه جمله است. انرژی ِ متوسط ِ جنبشی که برای ِ هر الکترون $\frac{۳}{۵}\epsilon_F = \frac{۳}{۵}e\phi(r)$ است. هم‌چنین سهم ِ برهم‌کنش با هسته و ابر ِ الکترونی،

$$E_۰ = \frac{۳}{۵}\int_۰^\infty \phi(r)n(r).۴\pi r^۲ dr - e\int_۰^\infty \left[\frac{Ze}{r} + \frac{۱}{۲}\left\{\phi(r) - \frac{Ze}{r}\right\}\right] n(r).۴\pi r^۲ dr. \quad (۱۱۹.۸)$$

در نوشتن ِ جمله‌ی ِ دوم در سمت ِ راست ِ تساوی ِ بالا دقت کرده‌ایم که در محاسبه‌ی ِ سهم ِ برهم‌کنش ِ الکترون‌ها با ابر ِ الکترونی سهم ِ پتانسیل ِ هسته در $\phi(r)$ را جدا کنیم. می‌شود نشان داد که

$$E_B = -E_۰ = ۱.۵۳۸Z^{۷/۳}\chi,$$

که $\chi = e^۲/۲a_B \simeq ۱۳.۶eV$ انرژی ِ بستگی ِ اتم ِ هیدروژن است.

فصل ۹

بسط خوشه‌ای و سهم برهم‌کنش ذرات درآمار گاز کلاسیه

در این فصل روش ِ بسط ِ خوشه‌ای برای ِ محاسبه‌ی ِ سهم برهم‌کنش ذرات در گاز کلاسیک را مطالعه می‌کنیم. همان‌طور که خواهیم دید آن چه می‌آموزیم در مورد ِ گازها و آن هم در دمای ِ به حد ِ کافی زیاد کاربرد خواهد داشت.

بسط خوشه‌ای برای گاز کلاسیک

گاز ِ تک اتمی و خالصی را در نظر بگیرید که ذرات ِ تشکیل دهنده‌ی ِ آن دوبه‌دو برهم‌کنش می‌کنند. فرض کنید که پتانسیل ِ برهم‌کنش ِ دو ذره تنها تابعی از بردار ِ مکان ِ نسبی ِ آن‌دو باشد. همیلتونی ِ دستگاه با

$$H = \sum_i \left(\frac{\vec{p}_i^{\,۲}}{۲m} \right) + \sum_{i<j} u_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \qquad i,j = ۱,۲,\cdots,N, \qquad (۱.۹)$$

داده می شود. به طور ِ طبیعی جمله‌ی ِ پتانسیل مجموع ِ $N(N-۱)/۲$ برهم‌کنش ِ دو–ذره‌ای است. تابع ِ پارش ِ دستگاه با رابطه‌ی ِ زیر داده می‌شود،

$$\begin{aligned} Q_N &= \frac{۱}{N!h^{۳N}} \int \exp\left\{-\beta \sum_i \left(\frac{\vec{p}_i^{\,۲}}{۲m}\right) - \beta \sum_{i<j} u_{ij}\right\} d^{۳N}p d^{۳N}r \\ &= \frac{۱}{N!\lambda^{۳N}} \int \exp\left\{-\beta \sum_{i<j} u_{ij}\right\} d^{۳N}r \\ &= \frac{۱}{N!\lambda^{۳N}} Z_N(V,T), \end{aligned} \tag{۲.۹}$$

که در آن $\lambda = h/(۲\pi mkT)^{۱/۲}$ طول ِ موج ِ میانگین ِ گرمایی است. به $Z_N(V,T)$ انتگرال ِ پیکربندی ِ دستگاه می‌گویند،

$$Z_N(V,T) = \int \prod_{i<j} e^{-\beta u_{ij}} d^{۳N}r. \tag{۳.۹}$$

هدف از بسط ِ خوشه‌ای ارایه‌ی ِ روشی برای ِ محاسبه‌ی ِ $Z_N(V,T)$ است. برای ِ این کار تابع ِ

$$f_{ij} = e^{-\beta u_{ij}} - ۱, \tag{۴.۹}$$

را تعریف می‌کنیم. در نبود ِ برهم‌کنش $f_{ij} = ۰$. به علاوه اگر دما به حد ِ کافی زیاد باشد آن‌گاه در حضور ِ برهم‌کنش $f_{ij} \ll ۱$. پس در حد ِ دماهای ِ بالا مناسب است/می‌شود که انتگرال ِ پیکربندی ِ دستگاه را به صورت ِ بسطی برحسب ِ f_{ij} ارایه کرد و به این طریق Z_N را به روش ِ اختلال ِ محاسبه کنیم،

$$\begin{aligned} Z_N(V,T) &= \int \prod_{i<j} (۱ + f_{ij}) d^{۳N}r \\ &= \int \left(۱ + \sum f_{ij} + \sum f_{ij}f_{kl} + \cdots\right) d^{۳}r_{۱} d^{۳}r_{۲} \cdots d^{۳}r_N. \end{aligned} \tag{۵.۹}$$

اگر f_{ij} را نماد ِ برهم‌کنش ِ بین ِ ذرات ِ iام و jام بگیریم معنی ِ عبارت ِ بالا روشن است. ابتدا دقت می‌کنیم که چون $f_{ij} \ll ۱$ در عبارت ِ بالا جملات بر حسب ِ مرتبه‌ی ِ بزرگی‌شان مرتب شده‌اند. جمله‌ی ِ اول که نظیر ِ $f_{ij} = ۰$ است به طور ِ طبیعی برای ِ Z_N همان مقداری را می‌دهد که برای ِ

گاز ِ بی‌برهم‌کنش در فصل ِ ۳ به دست آوردیم یعنی

$$Z^{(0)}(V,T) = V^N, \quad \Rightarrow \quad Q^{(0)}(V,T) = \frac{V^N}{N!\lambda^{3N}}. \tag{۶.۹}$$

جمله‌ی ِ دوم در بسط ِ Z_N در معادله‌ی ِ (۵.۹) می‌گوید که اولین تصحیحی که از برهم‌کنش می‌آید آن است که از بین ِ N ذره تنها سهم ِ برهم‌کنش ِ دوتای ِ آن ها را در نظر بگیریم و البته این کار را برای ِ تمام ِ دوتایی‌های ِ ممکن تکرار کنیم. جمله‌ی ِ سوم سهم ِ دو دوتایی را می‌دهد. به این معنا که تمامی ِ جفت دوتایی‌های ِ ممکن را در نظر بگیریم. این جفت‌ها ممکن است به صورت ِ $(i,j)(j,k)$ باشند یا به صورت ِ $(i,j)(k,l)$. فرق ِ شان در این است که در جفت ِ $(i,j)(k,l)$ دوتایی‌ها از هم مستقل اند و به اصطلاح چهارتایی ِ $(i,j)(k,l)$ به دو دوتایی ِ (i,j) و (k,l) جداپذیر است،

$$\int d^{3N}r f_{ij}f_{kl} = \left(\int d^3r_i d^3r_j f_{ij}\right)\left(\int d^3r_k d^3r_l f_{kl}\right) V^{N-4}, \tag{۷.۹}$$

ولی سه‌تایی ِ $(i,j)(j,k)$ حاصل ِ ضرب ِ دو دوتایی نیست،

$$\int d^{3N}r f_{ij}f_{jl} = \left(\int d^3r_i d^3r_j d^3r_k f_{ij}f_{jk}\right) V^{N-3}, \tag{۸.۹}$$

و به اصطلاح جداناپذیر است. جمله‌ی ِ چهارم سهم ِ سه دوتایی را می‌دهد که شامل ِ شش‌تایی‌های ِ جداناپذیر، حاصل ِ ضرب ِ یک چهارتایی ِ جداناپذیر در یک دوتایی ِ جداناپذیر و حاصل ِ ضرب ِ دو سه‌تایی ِ جداناپذیر است.

از بحث ِ بالا معلوم می‌شود که جمع ِ (۵.۹) را می‌شود به صورت ِ جمعی از حاصل ِ ضرب ِ l —تایی‌های ِ جداناپذیر نوشت. مقدار ِ یک l—تایی ِ جداناپذیر با جمع ِ مقدار ِ تمامی ِ خوشه‌های ِ l—حبه‌ای داده می‌شود. خوشه‌ی ِ l—حبه‌ای انواع ِ مختلفی دارد. مثلاً برای ِ یک سه‌تایی ِ جداناپذیر شامل ِ ذرات ِ iاُم، jاُم و kاُم سه خوشه‌ی ِ سه—حبه‌ای از نوع ِ

$$\int d^{3N}r f_{ij}f_{jk} = \left(\int d^3r_i d^3r_j d^3r_k f_{ij}f_{jk}\right) V^{N-3}, \tag{۹.۹}$$

و یک خوشه‌ی ِ سه–حبه‌ای از نوع ِ

$$\int d^{۳N} r f_{ij} f_{kl} f_{ki} = \left(\int d^{۳} r_i d^{۳} r_j d^{۳} r_k f_{ij} f_{jk} f_{ki} \right) V^{N-۴}. \qquad (۱۰.۹)$$

وجود دارد. مهم این است که مقدار ِ نظیر ِ هر خوشه‌ی ِ l–حبه‌ای تنها به ساختار (توپولوژی) ِ آن بستگی دارد و نه به برچسب ِ حبه‌ها. دلیلش هم این است که در محاسبه‌ی ِ آن روی ِ مکان ِ ذره‌ی ِ نظیر ِ هر حبه انتگرال گرفته می‌شود.

پس برای ِ محاسبه‌ی ِ Z_N می‌شود به جای ِ مرتب کردن ِ جملات ِ ناشی از برهم‌کنش بر حسب ِ مرتبه‌ی ِ بزرگی‌شان یعنی آن چه که در (۵.۹) انجام دادیم به صورت ِ زیر عمل کنیم. ابتدا ذرات را در l m_l–تایی ِ جداناپذیر دسته می‌کنیم. معلوم است که

$$\sum_{l}^{N} l m_l = N, \qquad m_l = ۰, \cdots, N. \qquad (۱۱.۹)$$

این کار را به

$$\frac{N!}{(۱!)^{m_۱} (۲!)^{m_۲} \cdots} = \frac{N!}{\prod_l (l!)^{m_l}}, \qquad (۱۲.۹)$$

حالت می‌شود انجام داد. چون مقدار ِ یک l–تایی ِ جداناپذیر تنها به ساختار ِ خوشه‌های ِ l–حبه‌ای و نه به برچسب ِ حبه‌ها بستگی دارد هر ترتیب ِ $\{m_l\}$، $w_{\{m_l\}}$ بار

$$w_{\{m_l\}} = \left(\frac{۱}{m_۱!} \frac{۱}{m_۲!} \cdots \right) \frac{N!}{(۱!)^{m_۱} (۲!)^{m_۲} \cdots} = \left(\prod_l \frac{۱}{m_l!} \right) \left(\frac{N!}{\prod_l (l!)^{m_l}} \right), \qquad (۱۳.۹)$$

در محاسبه‌ی ِ Z_N تکرار می‌شود. برای ِ مثال حالت ِ خاصی را در نظر بگیرید که N ذره را در $m_۱ = N$ یک–تایی مرتب کنیم. این کار به $N!/(۱!)^N$ حالت امکان‌پذیر است اما چنین جمله‌ای تنها یک بار در Z_N ظاهر می‌شود (جمله‌ی ِ اول در (۵.۹)). حالت ِ خاص ِ دیگر مرتب کردن ِ N ذره در یک دوتایی و $(N-۲)$ یک‌تایی است. این کار به $N!/\{(۱!)^{N-۲}(۲!)^۱\}$ حالت انجام می‌شود اما این جمله در Z_N تنها $N(N-۱)/۲$ بار تکرار می‌شود (جمله‌ی ِ دوم در (۵.۹)). ازاین‌رو

$$Z_N(V,T) = \sum_{\{m_l\}} w_{\{m_l\}} \prod_l s_l^{m_l}, \qquad (۱۴.۹)$$

که s_l مقدار ِ l—تایی ِ جداناپذیر است. به هر l—تایی ِ جداناپذیر مقدار ِ b_l را نسبت می‌دهیم،

$$b_l = \frac{۱}{l!\lambda^{۳(l-۱)}V} s_l, \qquad (۱۵.۹)$$

ارزش ِ این تعریف در این است که b_l کمیتی بی‌بعد است. به علاوه در حد ِ $V \to \infty$ مقدار ِ آن که با $\tilde{b}_l$ نشان می‌دهیم از مشخصات ِ ظرف مستقل است. دلیل ِ این حرف این است که در محاسبه‌ی ِ هر خوشه‌ی ِ l—حبه‌ای می‌شود انتگرال ِ روی ِ مکان ِ $(l-۱)$ حبه را با گرفتن ِ انتگرال روی ِ مکان ِ آن‌ها نسبت به حبه‌ی ِ lاُم انجام داد. در حد ِ $V \to \infty$ به خاطر ِ برد ِ محدود ِ نیروهای ِ بین ِ ذره‌ای نتیجه از شکل ِ ظرف مستقل است. انتگرال‌گیری روی ِ مکان ِ حبه‌ی ِ lاُم یک V می‌دهد که با V در مخرج ِ کسر در (۱۵.۹) ساده می‌شود.

با جای‌گذاری ِ (۱۵.۹) و (۱۳.۹) در (۱۴.۹) خواهیم داشت،

$$Z_N(V,T) = N!\lambda^{۳N} \sum_{\{m_l\}} \left[\prod_l \left\{ \left(b_l \frac{V}{\lambda^۳} \right)^{m_l} \frac{۱}{m_l!} \right\} \right], \qquad (۱۶.۹)$$

که در آن جمع روی ِ $\{m_l\}$هایی است که قید ِ (۱۱.۹) را برآورده می‌کنند. این قید در محاسبه‌ی ِ تابع ِ پارش ِ بزرگ وارد نمی‌شود. به سادگی می‌شود نشان داد که

$$\frac{۱}{V} \ln \mathcal{L} = \frac{۱}{\lambda^۳} \sum_l b_l z^l. \qquad (۱۷.۹)$$

در حد ِ $V \to \infty$ داریم،

$$\frac{P}{kT} = \lim_{V\to\infty} \left(\frac{۱}{V} \ln \mathcal{L} \right) = \frac{۱}{\lambda^۳} \sum_{l=۱}^{\infty} \tilde{b}_l z^l, \qquad (۱۸.۹)$$

$$\frac{N}{V} = \lim_{V\to\infty} \left(\frac{z}{V} \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial z} \right) = \frac{۱}{\lambda^۳} \sum_{l=۱}^{\infty} l\tilde{b}_l z^l. \qquad (۱۹.۹)$$

این نتیجه به بسط ِ خوشه‌ای در روش ِ مایر—اُرسل Mayer-Ursell معروف است.

بسط ویریال

معادله‌ی ِ حالت ِ گاز با حذف ِ z در دو رابطه‌ی ِ بالا به دست می آید،

$$\frac{Pv}{kT} = \sum_{l=1}^{\infty} a_l(T) \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1}, \qquad (۲۰.۹)$$

که در آن $v = V/N$. ضرایب ِ ویریال از رابطه‌ی ِ زیر به دست می آیند،

$$a_l = \begin{cases} \tilde{b}_1 = 1, & l = 1, \\ -\tilde{b}_2, & l = 2, \\ -\frac{l-1}{l}\beta_{l-1}, & l \geq 2. \end{cases} \qquad (۲۱.۹)$$

β_l کمیتی مثل ِ b_l است که تنها از خوشه‌های ِ کاهش‌ناپذیر سهم می‌برد،

$$\beta_{l-1} = \frac{1}{(l-1)!\lambda^{3(l-1)}} s_l^{irr}, \qquad (۲۲.۹)$$

که s_l^{irr} جمع ِ تمامی ِ خوشه‌های ِ l–حبه‌ای ِ کاهش‌ناپذیر است. خوشه‌ی ِ l–حبه‌ای ِ کاهش‌ناپذیر طبق ِ تعریف خوشه‌ای است که بین ِ هر دو حبه‌ی ِ آن دو مسیر ِ مستقل که هم‌دیگر را قطع نکنند وجود دارد. خوشه‌ی ِ سه حبه‌ای که در معادله‌ی ِ (۱۰.۹) داده شده تنها خوشه‌ی ِ سه حبه‌ای ِ کاهش‌ناپذیر است: حبه‌های ِ i و k با دو مسیر که با دنبال کردن ِ پل (link)های f_{ik} یا $f_{ij}f_{jk}$ ساخته می‌شود به هم وصل اند. در ۱۹۳۷ خانم[1] ِ مایر نشان داد که

$$b_l = \frac{1}{l^2} \sum_{\{m_k\}} \prod_{k=1}^{l-1} \frac{(l\beta_k)^{m_k}}{m_k!}, \qquad (۲۳.۹)$$

که در آن جمع روی ِ $\{m_k\}$هایی است که در شرط ِ زیر صدق می‌کنند،

$$\sum_{k=1}^{l-1} k m_k = l - 1, \qquad m_k = 0, 1, 2, \cdots. \qquad (۲۴.۹)$$

مایر در ۱۹۴۲ و کیل‌پاتریک Kilpatrick در ۱۹۵۳ نشان دادند که رابطه‌ی ِ (۲۳.۹) هم‌ارز ِ رابطه‌ی ِ زیر است،

$$\beta_{l-1} = \sum_{m_i} (-1)^{\sum_i m_i - 1} \frac{(l - 2 + \sum_i m_i)!}{(l-1)!} \prod_i \frac{(ib_i)^{m_i}}{m_i!}, \qquad (۲۵.۹)$$

[1] تاکید از پتریا است.

که در آن جمع روی ِ $\{m_i\}$هایی است که شرط ِ زیر را برآورده می‌کنند،

$$\sum_{i=۲}^{l}(i-۱)m_i = l-۱, \qquad m_i = ۰, ۱, ۲, \cdots. \tag{۲۶.۹}$$

از این جا معلوم می‌شود که ضرایب ِ ویریال ِ a_l تنها به $b_۱, b_۲, \cdots, b_l$ بستگی دارد.

معادله‌ی وندروالس

برای ِ به دست آوردن ِ معادله‌ی ِ حالت ِ گازی که رفتار ِ آن به گاز ِ ایده‌آل نزدیک است کافی است که در بسط ِ ویریال ِ (۲۰.۹) تنها چند جمله‌ی ِ اول را در نظر گرفت. در این‌جا ما تنها دو جمله‌ی ِ اول را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که یک مدل ِ بسیار ساده برای ِ برهم‌کنش ِ بین ِ ذرات معادله‌ی ِ حالت ِ وندروالس را به دست آورد. جمله‌ی ِ اول در بسط ِ (۲۰.۹) که در آن $a_۱ = ۱$ همان رفتار ِ گاز ِ ایده‌آل را می‌دهد. برای ِ محاسبه‌ی ِ

$$a_۲ = -\tilde{b}_۲ = \frac{۲\pi}{\lambda^۳}\int_۰^\infty (۱ - e^{-u(\vec{r})/kT})r^۲ dr, \tag{۲۷.۹}$$

فرض می‌کنیم

$$u(r) = \begin{cases} \infty & r < r_۰, \\ -u_۰\left(\frac{r_۰}{r}\right)^۶ & r > r_۰. \end{cases} \tag{۲۸.۹}$$

توجیه ِ این مدل پتانسیل ِ لنارد—جُنز است،

$$u(r) = ۴\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{۱۲} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^۶\right]. \tag{۲۹.۹}$$

ϵ کمینه‌ی ِ پتانسیل را $u(r_۰) = -\epsilon$ در $r_۰ = ۲^{۱/۶}\sigma$ می‌دهد. اگر فاصله‌ی ِ دو ذره از $r_۰$ کم‌تر شود در مدل ِ لنارد—جنز دافعه ناگهان رشد می‌کند. از این رو تقریب ِ کره‌ی ِ نفوذ ناپذیر $(u(r)_{r<r_۰} \to \infty)$ کار می‌کند. برای ِ $r > r_۰$ هم در مدل ِ لنارد—جنز با تقریب ِ خوبی تنها جمله‌ی ِ اول سهم دارد. با جای‌گذاری ِ (۲۸.۹) در (۲۷.۹) داریم،

$$a_۲ = \frac{۲\pi}{\lambda^۳}\left[\int_۰^{r_۰} r^۲ dr + \int_{r_۰}^\infty \left[۱ - \exp\left\{\frac{u_۰}{kT}\left(\frac{r_۰}{r}\right)^۶\right\}\right] r^۲ dr\right]. \tag{۳۰.۹}$$

اگر فرض کنیم $u_۰ \ll kT$ آن گاه انتگرال‌ده در جمله‌ی ِ دوم در معادله‌ی ِ بالا به کمک ِ تقریب ِ $e^x \simeq ۱ + x$ ساده می‌شود. این فرض به جا است چرا که بسط ِ خوشه‌ای ِ مایر–ارسل از اساس بر چنین فرضی استوار است. از این جا خواهیم داشت،

$$a_۲ \simeq \frac{۲\pi r_۰^۳}{۳\lambda^۳}\left(۱ - \frac{u_۰}{kT}\right). \qquad (۳۱.۹)$$

با جای‌گذاری در (۲۰.۹) خواهیم داشت

$$P \simeq \frac{kT}{v}\left\{۱ + \frac{۲\pi r_۰^۳}{۳v}\left(۱ - \frac{u_۰}{kT}\right)\right\}. \qquad (۳۲.۹)$$

با کمی محاسبه این نتیجه را می‌شود به شکل ِ معادله‌ی ِ وندروالس نوشت،

$$\left(P + \frac{۲\pi r_۰^۳ u_۰}{۳v^۲}\right) \simeq \frac{kT}{v}\left(۱ + \frac{۲\pi r_۰^۳}{۳v}\right) \simeq \frac{kT}{v}\left(۱ - \frac{۲\pi r_۰^۳}{۳v}\right)^{-۱}, \qquad (۳۳.۹)$$

و در نتیجه

$$\left(P + \frac{a}{v^۲}\right)(v - b) \simeq kT, \qquad (۳۴.۹)$$

که در آن

$$a = \frac{۲\pi r_۰^۳ u_۰}{۳}, \qquad b = \frac{۲\pi r_۰^۳}{۳} = ۴v_۰. \qquad (۳۵.۹)$$

که در آن $v_۰$ حجم ِ کره‌ی ِ نفوذ ناپذیر است. جالب آن است که b در معادله‌ی ِ وندروالس چهار برابر ِ حجم ِ نوعی ِ ذرات درمی‌آید.

فصل ۱۰

گذار فاز

گذار فاز نام ِ عمومی ِ پدیده‌هایی است که با بروز ِ یک ناپیوستگی در ترمودینامیک ِ یک دستگاه همراه است. مثال ِ آشنای ِ آن چگالش ِ گازها است. در این پدیده اغلب برهم‌کنش ذرات ِ سازنده‌ی ِ دستگاه نقش ِ اساسی دارد. چگالش ِ بوز–اینشتین در گاز ِ ایده‌آل ِ بوزونی البته یک استثنا است. این فصل به مطالعه‌ی ِ چند مدل ِ ساده‌ی ِ آماری برای ِ گذار ِ فاز اختصاص دارد.

۱۰–۱ مدل مایر برای چگالش

در نظریه‌ی ِ مایر تابع ِ پارش با رابطه‌ی ِ

$$Q_N(V,T) = \sum_{\{m_l\}} \left[\prod_l \left\{ \left(b_l \frac{V}{\lambda^3} \right)^{m_l} \frac{1}{m_l!} \right\} \right], \qquad (۱.۱۰)$$

داده می‌شود که در آن جمع روی ِ $\{m_l\}$هایی است که قید ِ

$$\sum_l^N l m_l = N, \qquad m_l = 0, \cdots, N, \qquad (۲.۱۰)$$

را برآورده می‌کنند. در دماهای ِ بالا خوشه‌های ِ بزرگ ($l \gg 1$) سهمی در Q_N ندارند. اما خواهیم دید که با کاهش ِ دما ناگهان این جملات به شدت مهم می‌شوند. این اتفاق را می‌توان هم‌ارز ِ

چگالش ِ گاز گرفت. برای ِ بررسی ِ این پدیده رفتار ِ m_l را برای ِ lهای ِ بزرگ مطالعه می‌کنیم. برای ِ این کار ابتدا Q_N را حساب می‌کنیم. می‌دانیم که می‌شود با تقریب ِ خوبی $\ln Q_N$ را برابر ِ لگاریتم ِ بزرگ‌ترین جمله‌ی ِ آن گرفت،

$$\ln Q_N \simeq \sum_l m_l^* \left\{ \ln\left(\frac{b_l V}{\lambda^۳}\right) - \ln m_l^* + ۱ \right\}, \qquad (۳.۱۰)$$

که m_l^*ها با شرایط ِ زیر داده می‌شوند،

$$\sum_l \left\{ \ln\left(\frac{b_l V}{\lambda^۳}\right) - \ln m_l \right\} \delta m_l = ۰, \qquad (۴.۱۰)$$

$$\sum_l l \delta m_l = ۰. \qquad (۵.۱۰)$$

با روش ِ ضرایب ِ نامعین ِ لاگرانژ معادلات ِ بالا را می‌شود حل کرد،

$$\ln\left(\frac{b_l V}{\lambda^۳}\right) - \ln m_l^* - \alpha l = ۰, \quad \Rightarrow \quad m_l^* = \frac{V}{\lambda^۳} b_l e^{-\alpha l}. \qquad (۶.۱۰)$$

با جای‌گذاری در (۳.۱۰) داریم،

$$\ln Q \simeq \sum_l m_l^* (\alpha l + ۱) = \alpha N + \frac{V}{\lambda^۳} \sum_l b_l e^{-\alpha l}. \qquad (۷.۱۰)$$

با مقایسه‌ی ِ این رابطه با معادله‌ی ِ (۱۷.۹) و با استفاده از تقریب ِ $\ln \mathcal{L} \simeq N \ln z + \ln Q_N$ می‌بینیم که $\alpha = -\ln z$. ازاین‌رو

$$m_l^* = \frac{V}{\lambda^۳} b_l z^l \qquad (۸.۱۰)$$

از رابطه‌ی ِ (۱۸.۹) می شود دید که این نتیجه گیری به این معنا است که $(PV/kT) = \sum_l m_l^*$ که این معادله‌ی ِ حالت ِ گاز ِ ایده‌آلی از خوشه‌ها است. این تعبیر را جدی نگیرید!

از (۸.۱۰) معلوم است که برای ِ فهمیدن ِ رفتار ِ m_l^*ها باید رفتار ِ b_lها را بررسی کنیم. از (۲۳.۹) داریم که

$$b_l = \frac{۱}{l^۲} \sum_{\{m_k\}} \prod_{k=۱}^{l-۱} \frac{(l\beta_k)^{m_k}}{m_k!}, \qquad (۹.۱۰)$$

که در آن جمع روی ِ $\{m_k\}$هایی است که در شرط ِ زیر صدق می‌کنند،

$$\sum_{k=1}^{l-1} k m_k = l-1, \qquad m_k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{۱۰.۱۰}$$

باز $\ln b_l$ را با لگاریتم ِ بزرگترین جمله در سمت ِ راست ِ معادله‌ی ِ (۹.۱۰) تقریب می‌زنیم

$$\ln b_l \simeq -2 \ln l + \sum_{k=1}^{l-1} m_k^* \left\{ \ln(l\beta_k) - \ln m_k^* + 1 \right\}, \tag{۱۱.۱۰}$$

و از روش ِ ضریب ِ نامعین ِ لاگرانژ برای ِ پیدا کردن ِ m_k^* با در نظر گرفتن ِ قید ِ (۱۰.۱۰) استفاده می‌کنیم. جواب این است که

$$m_k^* = l\beta_k e^{-\gamma k}, \tag{۱۲.۱۰}$$

که γ ضریب ِ نامعین ِ لاگرانژ است. با جای‌گذاری در (۱۰.۱۰) داریم،

$$\sum_k k\beta_k e^{-\gamma k} = \frac{l-1}{l} \simeq 1. \tag{۱۳.۱۰}$$

این معادله در واقع γ را تعیین می‌کند. با جای‌گذاری ِ (۱۲.۱۰) در (۱۱.۱۰) داریم،

$$\begin{aligned} \ln b_l &\simeq -2 \ln l + \sum_k m_k^* (\gamma k + 1) \\ &= -2 \ln l + (l-1)\gamma + l \sum_k \beta_k e^{-\gamma k} \\ &\simeq l \left(\gamma + \sum_k \beta_k e^{-\gamma k} \right), \end{aligned} \tag{۱۴.۱۰}$$

که تقریب ِ آخر از بزرگ بودن ِ l می آید. در نتیجه

$$b_l = c_l b_0^l, \qquad b_0(T) = \exp\left(\gamma + \sum_k \beta_k e^{-\gamma k} \right). \tag{۱۵.۱۰}$$

با جای‌گذاری در (۸.۱۰) برای ِ lهای ِ بزرگ داریم،

$$m_l^* = \frac{V}{\lambda^3} c_l (b_0 z)^l. \tag{۱۶.۱۰}$$

پس اگر $z < b_0^{-1}$ باشد خوشه‌های ِ بزرگ سهمی در رفتار ِ دستگاه ندارند چرا که $m_l^* \simeq 0$. اما اگر $z > b_0^{-1}$، m_l^* ناگهان زیاد می‌شود. در نتیجه وقتی z از مقدار ِ بحرانی ِ $z_c = b_0^{-1}$ بیشتر می‌شود خوشه‌های ِ بزرگ در عمل شکل می‌گیرند. چگالی ِ بحرانی نظیر ِ z_c را می‌شود از رابطه‌ی ِ

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{\lambda^3} \sum_{l \geq 1} l b_l z^l, \qquad (17.10)$$

با جای‌گذاری ِ $z = b_0^{-1}$ خواند،

$$\frac{1}{v_c} = \frac{1}{\lambda^3} \sum_{l \geq 1} l b_l b_0^l. \qquad (18.10)$$

برای ِ lهای ِ بزرگ جمله‌ی ِ $l b_l z^l$ در (۱۷.۱۰) را می‌شود به صورت ِ $l c_l (b_0 z)^l$ نوشت. در نتیجه برای ِ مقادیر ِ $z > b_0^{-1}$ این جملات به شدت بزرگ می شوند و در نتیجه v به سرعت کوچک می‌شود. این نتیجه را می‌شود طور ِ دیگری هم بیان کرد. مقدار ِ z به عنوان ِ تابعی از v عملاً در بازه‌ی ِ $v \leq v_c$ ثابت است. همین نتیجه برای ِ فشار به عنوان ِ تابعی از v هم برقرار است. در نتیجه مدل ِ مایر سازوکاری برای ِ چگالش ِ گازها به دست می‌دهد.

۱۰—۲ مدل آیزینگ

در مدل ِ مایر دیدیم که پدیده‌ی ِ چگالش از برهم‌کنش‌ها می‌آید و انرژی ِ جنبشی ذرات سهم ِ چندانی در این پدیده ندارد. مدل ِ آیزینگ که برای ِ بررسی ِ کمّی چگالش یا بهتر بگوییم گذار ِ فاز به کار گرفته می‌شود بر این مشاهده استوار است. در این مدل، دستگاه ِ فیزیکی به شبکه‌ای شامل ِ N جای‌گاه ساده می‌شود. در توصیف ِ پدیده‌ی ِ فرومغناطش این جای‌گاه‌ها با ذراتی با اسپین ِ $J = \frac{1}{2}$ (الکترون) پر می‌شود و برهم‌کنش ِ الکترون‌های ِ هم‌سایه به بروز ِ فرومغناطش در دمایی کم‌تر از یک مقدار ِ بحرانی می‌انجامد. در توصیف ِ میعان ِ گازها، $N_a < N$ اتم در N جای‌گاه توزیع می‌شوند و برهم‌کنش ِ هر دو اتمی که در هم‌سایگی ِ یک‌دیگر باشند به میعان در دمایی پایین‌تر از یک دمای ِ بحرانی منجر می‌شود. به همین روش می‌شود گذار ِ فاز در محلول‌ها یا آلیاژهای ِ دوتایی را بررسی

کرد. نتایج ِ نظری برپایه‌ی ِ این مدل به خوبی با تجربه هم‌خوانی دارند. در آن چه که در پیش می‌آید ابتدا به توجیه ِ مدل ِ آیزینگ می‌پردازیم. سپس با استفاده از تقریب ِ مرتبه‌ی ِ صفر ِ مدل ِ آیزینگ پدیده‌ی ِ فرومغناطش را به تفصیل مطالعه می‌کنیم. در پایان با جای‌گذاری ِ مناسب در روابط ِ نهایی ِ مربوط به فرومغناطش میعان ِ مایعات را بررسی می‌کنیم و نمودارهای ِ فشار–حجم (هم‌دما) برای ِ یک گاز–مایع ِ نوعی را رسم می‌کنیم.

۱۰–۲–۱ برهم‌کنش تبادلی و مدل هایزنبرگ

برای ِ بررسی ِ (فرو)مغناطش ِ خودبه‌خودی در فرومغناطیس‌هایی مثل ِ آهن یا نیکل، شبکه‌ای از N ذره با اسپین ِ J را در نظر می‌گیریم. ممان ِ مغناطیسی ِ هر ذره برحسب ِ مگنتون ِ بور μ_B با $\mu = g\mu_B J$ داده می‌شود. با مقایسه‌ی ِ داده‌های ِ تجربی با نتایج ِ نظری که مثلاً از مدل ِ وایس Weiss به دست می‌آید معلوم می‌شود که اسپین ِ ذراتی که در مواد ِ فرومغناطیس در فرومغناطش ِ خودبه‌خودی ِ آن‌ها سهم دارد $J = \frac{۱}{۲}$ است و هم‌چنین $g = ۲$. هردوی ِ این نتایج بر سهم‌پذیری پدیده ی ِ فرومغناطش تنها از الکترون‌های ِ ساکن دلالت دارد (شکل ِ ۹.۱۲ را در کتاب ببینید). ز این‌رو لازم نیست ممان ِ مغناطیسی ِ یون‌ها و یا سهم ِ حرکت ِ مداری ِ لکترون‌ها را در این پدیده به حساب بیاوریم. پس شبکه‌ی ِ مورد ِ نظر ِ ما شبکه‌ای فرضی شامل ِ N جای‌گاه است که با الکترون پر شده اند. برهم‌کنش ِ الکترون‌ها را به صورت ِ جمع ِ دو جمله می‌شودد نوشت، یکی برهم‌کنش ِ کولنی

$$K_{ij} = \int |\psi_i(\vec{r}_۱)|^۲ \, u_{ij} \, |\psi_j(\vec{r}_۲)|^۲ = \psi_i^*(۱)\psi_j^*(۲)u_{ij}\psi_i(۱)\psi_j(۲), \qquad (۱۹.۱۰)$$

و دیگری جمله‌ی ِ تبادلی exchange است که سرشتی کوانتمی دارد،

$$J_{ij} = \psi_i^*(۱)\psi_j^*(۲)u_{ij}\psi_i(۲)\psi_j(۱). \qquad (۲۰.۱۰)$$

برای ِ فهمیدن ِ این دو جمله تابع ِ موج ِ دستگاهی شامل ِ تنها الکترون‌های ِ iاُم و jاُم را فرض کنید. تابع ِ موج ِ این دستگاه برطبق ِ اصل ِ طرد ِ پاولی پادمتقارن است. پس اگر اسپین ِ این دستگاه ِ دو الکترونی $S = ۰$ باشد چون تابع ِ موج ِ اسپینی ِ آن پادمتقارن است تابع ِ موج ِ فضایی باید متقارن باشد. هم‌چنین اگر اسپین ِ دستگاه $S = ۱$ باشد تابع ِ موج ِ فضایی متقارن خواهد بود. اگر فرض کنیم بشود تابع ِ موج ِ فضایی دستگاه ِ دو الکترونی را برحسب ِ توابع ِ موج ِ تک ذره‌ای بنویسم آن‌گاه برای ِ مقدار ِ چشم‌داشتی ِ برهم‌کنش ِ دو الکترون عبارت ِ زیر به‌دست می آید:

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} K_{ij} + J_{ij} & S = ۰, \\ K_{ij} - J_{ij} & S = ۱. \end{cases} \qquad (۲۱.۱۰)$$

از آن جا که

$$\Delta\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(S = ۱) - \epsilon_{ij}(S = ۰) = -۲J_{ij},$$

نتیجه می‌گیریم که پیدایش ِ فرومغناطش یا پادفرومعناطش که نظیر ِ انتخاب ِ آرایش ِ نظیر ِ $S = ۱$ یا $S = ۰$ است به این بستگی دارد که $J_{ij} > ۰$ باشد یا $J_{ij} < ۰$ و اصولاً برهم‌کنش ِ کولنی سهمی در این جا ندارد. این نشان می‌دهد که فرومغناطش ِ خودبه‌خودی سرشتی یک سره کوانتمی دارد.

یک مشاهده

از آن جا که

$$\vec{s}_i.\vec{s}_j = \frac{۱}{۲}S(S+۱) - s(s+۱) = \begin{cases} \frac{۱}{۴}, & S = ۱ \\ -\frac{۳}{۴}, & S = ۰, \end{cases} \qquad (۲۲.۱۰)$$

می شود دید که با فرض ِ

$$\epsilon_{ij} = const. - ۲J_{ij}(\vec{s}_i.\vec{s}_j), \qquad (۲۳.۱۰)$$

همان نتیجه‌ی ِ پیشین ِ $\Delta\epsilon_{ij} = -۲J_{ij}$ به دست می‌آید. از سوی ِ دیگر چون J_{ij} با افزایش ِ فاصله‌ی ِ دو الکترون به سرعت کاهش می‌یابد ما تنها برهم‌کنش ِ تبادلی را برای ِ نزدیک‌ترین

هم‌سایه‌ها در نظر می‌گیریم. از جمیع ِ ملاحضات ِ بالا انتظار داریم مدل ِ زیر که هایزنبرگ در ۱۹۲۸ پیشنهاد کرد فرومعناطش را به درستی توضیح دهد:

$$E = const. - ۲J \sum_{n.n.} \vec{s}_i.\vec{s}_j. \qquad (۲۴.۱۰)$$

۱۰–۲–۲ مدل آیزینگ

مدل ِ آیزینگ که در ۱۹۲۵ پیش‌نهاد شد از مدل ِ هایزنبرگ ساده‌تر است. در این مدل از برهم‌کنش ِ $\vec{s}_i.\vec{s}_j$ برای ِ دو هم‌سایه تنها سهم ِ مربوط به راستای ِ سوم (راستای ِ میدان ِ مغناطیسی ِ زمینه) در نظر گرفته می‌شود. از این‌رو هر پیکربندی ِ دستگاه با توزیعی از $\{\sigma_i\}$ داده می‌شود که در آن $N_+(N_-)$ الکترون اسپین ِ شان بالا(پایین) است و $N_{++}(N_{--})$، هم‌سایگی وجود دارد که اسپین ِ الکترون‌ها در هر دو جای‌گاه بالا(پایین) است و N_{+-} هم‌سایگی وجود دارد که اسپین ِ الکترون‌ها در یک جای‌گاه بالا و در جای‌گاه ِ دیگر پایین است. همیلتونی ِ دستگاه با

$$H_N\{\sigma_i\} = -J \sum_{n.n.} \sigma_i\sigma_j - \mu B \sum_i \sigma_i, \qquad (۲۵.۱۰)$$

داده می‌شود. از این جا می‌شود تابع ِ پارش

$$Q_N(B,T) = \sum_{\sigma_۱} \sum_{\sigma_۲} \cdots \sum_{\sigma_N} e^{-\beta H\{\sigma_i\}}, \qquad (۲۶.۱۰)$$

را به دست آورد که در آن جمع ِ روی مقادیر ِ σ_iها البته به $\uparrow$ و $\downarrow$ محدود است. مغناطش ِ دستگاه با

$$\overline{M(B,T)} = \frac{۱}{\beta} \left(\frac{\partial \ln Q_N}{\partial B} \right)_T, \qquad (۲۷.۱۰)$$

داده می‌شود. خواهیم دید که در دماهای ِ کم‌تر از یک مقدار ِ بحرانی در غیاب ِ میدان ِ زمینه‌ی ِ B، $\overline{M(۰,T)} \neq ۰$ که به آن مغناطش ِ خودبه‌خودی می‌گوییم.

می‌شود همیلتونی ِ (۲۵.۱۰) را بر حسب ِ $N_{\pm}$ و $N_{\pm\pm}$ به این صورت نوشت،

$$\begin{aligned} H_N(N_+, N_{++}) &= -J(N_{++} + N_{--} - N_{+-}) - \mu B(N_+ - N_-) \\ &= -J(\frac{۱}{۲}qN - ۲qN_+ + ۴N_{++}) - \mu B(۲N_+ - N), \quad (۲۸.۱۰) \end{aligned}$$

که q تعداد ِ نزدیک‌ترین ِ هم‌سایگان ِ هر جای‌گاه را می‌دهد:

$$N_{++} + N_{+-} + N_{--} = \frac{۱}{۲}qN. \quad (۲۹.۱۰)$$

می‌توانیم مدل ِ آیزینگ را برای ِ توصیف ِ کمّی ِ میعان ِ گازها به کار ببریم. در این جا فرض می‌کنیم که N جای‌گاه داریم که با N_a ذره اشغال شده است. N در این جا به جای ِ حجم ِ ظرف ($N = V/\lambda^۳$) نشسته است و N_a تعداد ِ ذرات ِ گاز را می‌دهد. اگر با N_{aa} تعداد ِ هم‌سایگانی را بدهیم که هر دو جای‌گاه ِ شان اشغال شده است آن‌گاه همیلتونی ِ دستگاه با

$$H = -\epsilon_۰ N_{aa},$$

داده می‌شود. این مدل که به مدل ِ گاز ِ شبکه‌ای lattice gas معروف است توسط ِ یانگ و لی در ۱۹۵۲ پیش‌نهاد شده است. برای ِ بررسی ِ گذار ِ فاز در آلیاژهای ِ دو تایی همیلتونی با

$$H = \epsilon_{۱۱}N_{۱۱} + \epsilon_{۲۲}N_{۲۲} + \epsilon_{۱۲}N_{۱۲}, \quad (۳۰.۱۰)$$

داده می‌شود که در آن $N_{۱۲}$ تعداد هم‌سایگانی را می‌دهد که یک جای‌گاه ِ شان با اتم ِ نوع ِ ۱ و جای‌گاه ِ دیگر ِ شان با اتم ِ نوع ِ ۲ اشغال شده است. برای ِ دیدن ِ جزئیات ِ بیشتر به بخش ِ ٦ از فصل ِ ۱۲ رجوع کنید.

۱۰–۳ مدل آیزینگ در تقریب مرتبه‌ی صفر

تقریب ِ مرتبه‌ی ِ صفر ِ مدل ِ آیزینگ در ۱۹۳۴–۱۹۳۵ توسط ِ برَگ Bragg و ویلیامز Williams معرفی شد. در این تقریب، چیزی شبیه ِ نظریه‌ی ِ میدان ِ مولکولی ِ میانگین ِ وایس[۱] در نظر است به این معنا که در محاسبه‌ی ِ انرژی به جای ِ در نظر گرفتن ِ برهم‌کنش ِ هر ذره با میدان ِ موضعی در آن جای‌گاه که با تغییر ِ آرایش ِ هم‌سایه‌ها و از موضعی به موضع ِ دیگر تغییر می‌کند برهم‌کنش با میدان ِ میانگین که در سرتاسر ِ شبکه یکسان است در نظر گرفته شود. در این تقریب که در حد ِ $q \to \infty$ صحیح است به شکل ِ واضحی هندسه و بعد ِ شبکه در توضیح ِ پدیده‌ها نادیده گرفته می‌شود.

پارامتر ِ نظم ِ بلندبرد را با به این صورت تعریف می‌کنیم،

$$L = \frac{۱}{N}\sum_i \sigma_i = \frac{N_+ - N_-}{N} = ۲\frac{N_+}{N} - ۱. \qquad (۳۱.۱۰)$$

از این جا به سادگی می‌شود دید که $-۱ \le L \le ۱$ و $N_\pm = \frac{N}{۲}(۱ \pm L)$. مغناطش هم با رابطه‌ی ِ $M = (N_+ - N_-)\mu B = N\mu L$ داده می‌شود. انرژی در مدل ِ آیزینگ با رابطه‌ی ِ (۲۵.۱۰) داده می‌شود که در تقریب ِ مرتبه‌ی ِ صفر به این صورت در می‌آید:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{J}{۲}q\bar{\sigma}\sum_i \sigma_i - \mu B\sum_i \sigma_i \\ &= -\frac{۱}{۲}(qJ\bar{L})NL - \mu BNL, \end{aligned} \qquad (۳۲.۱۰)$$

که در به دست آوردن ِ تساوی ِ دوم از تساوی ِ $\bar{\sigma} = \bar{L}$ استفاده شده است. از این جا متوسط ِ انرژی $U = \bar{E}$ به دست می‌آید:

$$U = -\frac{۱}{۲}qJN\bar{L}^۲ - \mu BN\bar{L}. \qquad (۳۳.۱۰)$$

اگرتعادل ِ دستگاه را تعادل ِ ترمودینامیکی ِ دستگاه ِ ذرات ِ اسپین بالا و دستگاه ذرات اسپین پایین که

[۱] the mean molecular field theory of Weiss

با یکدیگر ذره مبادله می‌کنند بگیریم داریم

$$\mu_{\circ}(N_{+}) - \mu_{\circ}(N_{-}) = \delta U,$$

که در آن $\mu_{\circ}(N_{\pm})$ پتانسیل ِ شیمیایی دستگاه‌ها و δU تغییر ِ انرژی به ازای ِ عوض شدن راستای ِ اسپین ِ یکی از الکترون‌ها از بالا به پایین است:

$$\delta U \simeq \frac{\partial U}{\partial \bar{L}} \delta \bar{L} = ۲\mu(\frac{qJ}{\mu}\bar{\sigma} + B). \qquad (۳۴.۱۰)$$

از آن جا که در هنگرد ِ گراندکانونیک متوسط ِ تعداد ِ ذرات با $z = e^{\mu/kT}$ داده می‌شود در تقریب ِ کلاسیک داریم،

$$\frac{\bar{N}_{-}}{\bar{N}_{+}} = e^{-\delta U/kT} = \exp\left(\frac{-۲\mu(B + B')}{kT}\right), \qquad (۳۵.۱۰)$$

که در آن $B' = qJ\bar{\sigma}/\mu$. از آن جا که $N_{\pm} = N/۲(۱ \pm L)$ این تساوی را می‌شود به صورت ِ معادله‌ای برای ِ $\bar{L}$ درآورد:

$$\frac{qJ\bar{L} + \mu B}{kT} = \tanh^{-۱} \bar{L}. \qquad (۳۶.۱۰)$$

در غیاب ِ میدان ِ خارجی $B = ۰$ این رابطه به صورت ِ زیر در می آید،

$$\bar{L}_{\circ} = \tanh\left(\frac{T}{T_c}\bar{L}_{\circ}\right), \qquad (۳۷.۱۰)$$

که در آن $T_c = qJ/k$. تنها جواب ِ معادله‌ی ِ بالا برای ِ $T > T_c$، $\bar{L}_{\circ} = ۰$ است که می‌گوید در غیاب ِ میدان ِ خارجی در $T > T_c$ مغناطش ِ دستگاه صفر است. اما برای ِ $T < T_c$ این معادله جواب ِ دیگری هم دارد که مقدار ِ مغناطش ِ خودبه‌خودی ِ دستگاه را می‌دهد،

$$\bar{L}_{\circ} \simeq \begin{cases} ۱ - ۲\exp\left(-\frac{۲T_c}{T}\right), & T \ll T_c, \\ \sqrt{۳\left(۱ - \frac{T_c}{T}\right)}, & T \to {}^{-}T_c. \end{cases} \qquad (۳۸.۱۰)$$

در شکل ِ ۱۲.۱۲ در کتاب مغناطشی که در این جا به دست آوردیم با مقادیر ِ تجربی برای ِ آهن، نیکل، کبالت و مگنتیت [۲] مقایسه شده است. هم‌خوانی ِ بسیار خوب ِ این نمودارها تاکیدی بر درستی ِ تقریب ِ مرتبه‌ی ِ صفر ِ مدل ِ آیزینگ است.

ظرفیت ِ گرمایی ِ ویژه را می‌شود از رابطه‌ی ِ $U_\circ = -\frac{1}{2}qJN\bar{L}_\circ^2$ به این صورت به دست آورد،

$$C_\circ(T) = \frac{Nk\bar{L}_\circ^2}{\frac{(T/T_c)^2}{1-\bar{L}_\circ^2} - \frac{T}{T_c}} = \begin{cases} \frac{3}{2}Nk, & T = T_c^- \\ \circ, & T > T_c. \end{cases} \qquad (۳۹.۱۰)$$

ناپیوستگی $C_\circ(T)$ نشان‌دهنده‌ی ِ گذار ِ فاز در $T = T_c$ است.

مغناطش در دمای ِ بیشتر از T_c تنها در حضور ِ میدان ِ خارجی امکان‌پذیر است و مقدار ِ آن از رابطه‌ی ِ (۳۶.۱۰) به دست می‌آید. واضح است که در دمای ِ زیاد $\bar{L} \ll 1$. از این رو،

$$\frac{qJ\bar{L} + \mu B}{kT} \simeq \bar{L},$$

و در نتیجه

$$\chi = \frac{\bar{M}}{VB} = \frac{N\mu\bar{L}}{VB} \simeq \frac{C}{T - T_c}, \qquad (۴۰.۱۰)$$

که در آن $C = N\mu^2/Vk$. رابطه‌ی ِ بالا قانون ِ کوری—وایس نام دارد. دمای ِ بحرانی که از این رابطه به دست می‌آید غالباً از مقدار ِ تجربی ِ آن کمی بیشتر است. برای ِ مثال دمای ِ بحرانی که برای ِ نیکل $T_c = 631K$ است از این محاسبه $T_c = 650K$ به دست می‌آید.

در آن چه در پی می‌آید نشان می‌دهیم که تقریب ِ برگ—ویلیامز هم‌ارز ِ فرض ِ توزیع ِ تصادفی ِ ذرات در شبکه است. به این منظور رابطه‌ای که انرژی ِ شبکه برای ِ یک آرایشی که با N_+ و N_{++} داده می‌شود را با آن چه در تقریب ِ برگ—ویلیامز به کار گرفتیم مقایسه می‌کنیم،

$$\begin{aligned} U_\circ &= -J(\frac{1}{2}qN - 2q\bar{N}_+ + 4\bar{N}_{++}) \\ &= -\frac{1}{2}qN\left(\frac{2\bar{N}_+}{N} - 1\right)^2. \end{aligned} \qquad (۴۱.۱۰)$$

[۲] کانی ِ طبیعی ِ آهن که به صورت ِ Fe_3O_4 نمایش می‌دهند که در واقع ترکیبی از FeO و Fe_2O_3 است.

از این جا معلوم می‌شود که

$$\frac{\bar{N}_{++}}{N} = \left(\frac{\bar{N}_{+}}{N}\right)^{۲}.$$

یعنی این که احتمال ِ یافتن ِ یک زوج ِ اسپین—بالا در هم‌سایگی ِ یک‌دیگر درست مربع ِ احتمال ِ آن است که در اسپین ِ الکترونی در یک جای‌گاه ِ خاص بالا باشد. پس تقریب ِ برگ—ویلیامز همان توزیع ِ تصادفی ِ است که در آن هیچ هم‌بستگی بین ِ هم‌سایه‌ها وجود ندارد. از فرض ِ توزیع ِ تصادفی می‌شود به آسانی تبهگنی ِ $g(L)$ یعنی تعداد توزیع‌های ِ متفاوتی که نظیر ِ یک L ِ معلوم است را به دست آورد،

$$g(L) = \frac{N!}{[N/۲(۱+L)]!\,[N/۲(۱-L)]!}. \qquad (۴۲.۱۰)$$

انرژی ِ نظیر ِ هر L هم با

$$E(L) = -\frac{۱}{۲}qJNL^{۲} - \mu BNL,$$

داده می‌شود. از این‌جا می‌شود تابع ِ پارش را حساب کرد،

$$Q(B,T) = \sum_{L} g(L)e^{-\beta E(L)}. \qquad (۴۳.۱۰)$$

برای ِ محاسبه‌ی ِ انرژی ِ آزاد ِ دستگاه $A = -kT\ln Q$، $\ln Q$ را با لگاریتم ِ بزرگ‌ترین جمله در جمع ِ بالا تقریب می‌زنیم. با استفاده از تقریب ِ استرلینگ به نتیجه‌ی ِ زیر می‌رسیم،

$$\frac{۱}{A} \simeq kT\left\{\left(\frac{۱+\bar{L}}{۲}\right)\ln\left(\frac{۱+\bar{L}}{۲}\right) + \left(\frac{۱-\bar{L}}{۲}\right)\ln\left(\frac{۱-\bar{L}}{۲}\right)\right\} - \left(\frac{۱}{۲}qJ\bar{L}^{۲} + \mu B\bar{L}\right). \qquad (۴۴.۱۰)$$

$\bar{L}$ بزرگترین جمله در سمت ِ راست ِ تساوی ِ (۴۳.۱۰) را می‌دهد،

$$\frac{kT}{۲}\left\{\ln\left(\frac{۱+\bar{L}}{۲}\right) - \ln\left(\frac{۱-\bar{L}}{۲}\right)\right\} - (qJ\bar{L} + \mu B) = ۰, \qquad (۴۵.۱۰)$$

که همان رابطه‌ی ِ (۳۶.۱۰) است. آنتروپی ِ دستگاه با رابطه‌ی ِ $S = (U - A)/T$ داده می‌شود که U انرژی ِ دستگاه است،

$$U = -T\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{A}{T}\right) = -N(\frac{۱}{۲}qJ\bar{L}^{۲} + \mu BL). \qquad (۴۶.۱۰)$$

در نتیجه

$$S(B,T) = -Kk\left\{\left(\frac{۱+\bar{L}}{۲}\right)\ln\left(\frac{۱+\bar{L}}{۲}\right) + \left(\frac{۱-\bar{L}}{۲}\right)\ln\left(\frac{۱+\bar{L}}{۲}\right)\right\}. \qquad (۴۷.۱۰)$$

در حد ِ $\bar{L} \to ۰$ خواهیم داشت، $S = Nk\ln ۲$.

تمرین: نشان دهید در غیاب ِ میدان ِ خارجی

$$S(T_c) = \int_{۰}^{T_c} C_{۰}(T)\frac{dT}{T} = Nk\ln ۲. \qquad (۴۸.۱۰)$$

میعان گازها

همان طور که پیشتر گفتیم نتایج ِ بالا را می‌شود برای ِ توضیح ِ گذار ِ فاز ِ گاز—مایع به کار گرفت. با استفاده از جای‌گذاری‌های ِ داده شده در بخش ۶.۱۲ برای ِ فشار و حجم در مدل ِ شبکه‌ای ِ گاز داریم،

$$\begin{aligned} P &= \mu B - \frac{۱}{۸}q\epsilon_{۰}(۱+\bar{L}^{۲}) - \frac{kT}{۲}\ln\left(\frac{۱-\bar{L}^{۲}}{۴}\right), \\ \frac{۱}{v} &= \frac{۱}{۲}(۱+\bar{L}). \end{aligned} \qquad (۴۹.۱۰)$$

با حذف ِ $\bar{L}$ در دو معادله‌ی ِ بالا به ازای ِ هر مقدار از پارامتر ِ B یکی از نمودارهای ِ فشار—حجم (هم‌دما) به دست می‌آید (شکل ِ ۱۴.۱۲ را در کتاب ببینید). به عنوان ِ مثال برای ِ $B = ۰$، $\bar{L}$ از رابطه‌ی ِ $\bar{L} = \tanh\left(\frac{\bar{L}T_c}{T}\right)$ تعیین می‌شود که در آن $T_c = q\epsilon_{۰}/۴k$. اگر $T > T_c$ آن گاه $\bar{L} = ۰$ و در نتیجه $v(T) = ۲$. اما برای ِ $T < T_c$ دو فاز ِ گاز و مایع با حجم ِ ویژه‌ی ِ $v_{\pm} = ۲/(۱ \pm |\bar{L}|)$ وجود دارند.

۱۰–۴ مدل آیزینگ در تقریب اول