ماتریسِ دوران حولِ یک محورِ مورب

فرهنگِ لران

دانش‌کده‌یِ فیزیک[۱]، دانش‌گاهِ صنعتیِ اصفهان، اصفهان ۸۳۱۱۱–۸۴۱۵۶

چکیده: در این مقاله مولدِ دوران حولِ یک محورِ مورب و ماتریسِ دورانِ نظیرِ آن‌را به دست می‌آوریم.

گروهِ دوران در فضایِ تختِ سه بعدی گروهِ $\mathrm{SO}(3)$ است. در این نام‌گذاری، عددِ ۳ یادآورِ آن است که نمایشِ پایه‌یِ این گروه با مجموعه‌یِ ماتریس‌هایِ سه در سه، R، داده می‌شود. حرف O نشانِ آن است که این ماتریس‌ها متعامد هستند، $R\,R^t = 1$، و حرفِ S به این معنا ست که دترمینانِ این ماتریس‌ها یک است. به ساده‌گی می‌شود نشان داد که این مجموعه با عملِ ضربِ متعارفِ ماتریس‌ها یک گروه می‌سازد.

از نظریه‌یِ نسبیتِ خاصِ اینشتین می‌دانیم که گروهِ تقارنِ بنیادیِ طبیعتِ ما گروهِ لورنتس است. این گروه مجموعه‌ای از تبدیلاتِ خیز و دوران است. پس گروهِ دوران زیرگروهی از تقارنِ بنیادیِ طبیعت است و در نتیجه می‌شود از نمایش‌هایِ گوناگونِ آن برای طبقه‌بندیِ کمیت‌هایِ فیزیکی استفاده کرد. اگر بردارِ مکان را معیارِ تعریفِ نمایش‌هایِ این گروه بگیریم آن‌گاه می‌توانیم هر کمیتی که تحتِ دوران هم‌چون بردارِ مکان تغییر کند را «کمیتِ برداری» بنامیم. رابطه‌یِ زیر تبدیلِ مؤلفه‌هایِ بردارِ مکان تحتِ خیز را می‌دهد:

$$x_{\mathrm{i}}{}' = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}\, x_j$$

پس اگر کمیتی مثلِ A داشتیم که سه مؤلفه داشت $(A_1 \quad \mathrm{A}_2 \quad \mathrm{A}_3)$ که تحتِ دوران به صورتِ زیر تبدیل شدند،

[۱] http://loran.iut.ac.ir

$$A_{\mathrm{i}}{}' = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}\, A_j$$

آن را کمیتِ برداری می‌نامیم. هم‌چنین به هر کمیتی که هم‌چون ضربِ داخلیِ دو بردار ِ مکان تحتِ دوران ناوردا باشد اسکالر ِ دوران می‌گوییم. مثلاً پتانسیلِ الکتریکی یک اسکالر ِ دوران و میدانِ الکتریکی یک بردار است.

گاهی اسکالر و بردار را تانسور ِ رتبه‌یِ صفر و تانسور ِ رتبه‌ی ِ یک می‌خوانند. در این شیوه‌یِ نام‌گذاری یک تانسور ِ رتبه‌یِ n، 3^{n} عضو دارد. چگونه‌گی ِ تغییر ِ مؤلفه‌های یک تانسور ِ رتبه‌ی ِ n تحتِ دوران شبیهِ رفتار ِ تانسور ِ رتبه‌یِ n ی است که مؤلفه‌هایش از ضربِ مؤلفه‌هایِ n بردار ِمکان به دست آمده باشد،

$$T'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n = 1}^{3} R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \ldots R_{i_n j_n}\, T_{j_1 j_2 \ldots j_n}$$

به عنوان ِ مثال گشتاور ِ لختی، چارقطبیِ الکتریکی و تانسور ِ فشار تحتِ دوران تانسور ِرتبه‌یِ دو هستند.

خوب است توجه کنیم که یک کمیت می‌تواند به طور ِ هم‌زمان در نمایش‌هایِ مختلفِ گروه‌هایِ گوناگونی قرار داشته باشد. مثلاً پتانسیلِ الکتریکی که اسکالر ِ دوران است تحتِ خیز به صورتِ مؤلفه‌یِ صفرمِ یک چاربردار رفتار می‌کند. یا مؤلفه‌هایِ میدانِ الکتریکی که تحتِ دوران یک بردار است، نیمی از مؤلفه‌هایِ یک تانسور ِ رتبه‌یِ دو تحتِ خیز را می‌سازند.

نمایش‌هایِ تانسوریِ گروهِ دوران به کار ِ توصیف ِ الکترون و پروتون نمی‌آیند. در مکانیکِ کوانتمی تابعِ موجِ یک الکترون با نمایشِ اسپینوری داده می‌شود که دو مؤلفه‌یِ مختلط دارد. برخلاف ِ تانسورها که مؤلفه‌هایِ شان تحتِ دورانِ ۳۶۰ درجه تغییر نمی‌کند، چنین دورانی مؤلفه‌هایِ یک اسپینور را به اندازه‌یِ فاز ِ π تغییر می‌دهد. یعنی تحتِ دوران ِ ۳۶۰ درجه هر اسپینور در یک $e^{\mathrm{i}\pi} = -1$ ضرب می‌شود.

نمایش‌هایِ گروه ِ دوران و کاربردِ آن‌ها در طبقه‌بندی ِ کمیت‌هایِ فیزیکی بحثِ مفصلی است که در این نوشته بیش از این به آن نمی‌پردازیم. موضوعِ اصلی این مقاله یافتنِ ماتریسی است که دوران

حولِ یک محور ِ دل‌خواه را توصیف کند. این مسأله به ویژه در کتاب‌های ِ مکانیک ِکوانتمی بررسی شده است و امیدوارم که ره‌یافت ِ ارائه شده در این مقاله به فهم ِ به‌تر ِ مطلب کمک کند.

فرض کنید می‌خواهیم دینامیک ِ دری که محور ِ آن نسبت به راستای ِ قائم اندکی منحرف شده است را بررسی کنیم. به طور ِ شهودی می‌دانیم که وضعیت ِ تعادل ِ در، وضعیتی است که در بر سطح ِ افق عمود باشد. همین‌طور می‌دانیم که این وضعیت، حالت ِ تعادل ِ پای‌دار ِ دست‌گاه است و اگر در را از این وضعیت خارج کنیم دوباره به سر ِجای ِخودش بر می‌گردد. این روشی است که احتمالاً در طراحی ِدر ِ یخچال به کار رفته است چون باعث می‌شود که در خود به خود بسته شود.

برای ِ نوشتن ِ معادله‌ی ِ حرکت به‌تر است که انرژی ِ پتانسیل ِ گرانشی را در حالتی که در به اندازه‌ی ِ زاویه‌ی ِθ از وضعیت ِ تعادلش خارج شده بنویسیم. برای ِ این کار، باید بدانیم که اندازه‌ی ِ مولفه‌ی ِ عمودی ِ بردار ِ مرکزِ جرم ِ در به چه صورتی با θ تغییر می‌کند. اگر بردار ِ مرکز ِ جرم در حالت ِ تعادل را با $\overrightarrow{r_0}$ نشان دهیم آن‌گاه بردار ِمرکز ِ جرم در زاویه‌ی ِθ با رابطه‌ی ِ

$$\vec{r}(\theta) = R_n(\theta)\overrightarrow{r_0}, \quad (۱)$$

داده می‌شود که $R_n(\theta)$ ماتریس دوران به اندازه‌ی ِ زاویه‌ی ِθحول ِ محور ِ مورب است. برای ِ به دست آوردن ِ این ماتریس ِ دوران ابتدا باید مساله‌ی ِ دیگری را حل کنیم.

فرض کنید بردار ِ $\vec{A}$ بدون ِ آن که طول ِ آن تغییر کند با سرعت ِ زاویه‌ای ِ ω حول ِ محور ِ $\hat{n}$ می‌چرخد. می‌دانیم که

$$\frac{d\vec{A}}{\mathrm{dt}} = \vec{\omega} \times \vec{\mathrm{A}} \quad (۲)$$

که در آن $\vec{\omega} = \omega\, \hat{n}$. هرچند اثبات ِ این رابطه در کتاب‌های ِ مکانیک یافت می‌شود ولی چون روند ِاثبات ِ آن به فهمیدن ِ نتیجه کمک می‌کند آن‌را در این‌جا بازگو می‌کنیم. اگر بردار ِ $\vec{A}$ را بر حسب ِ مؤلفه‌ی ِ موازی ِ $\hat{n}$ و عمود بر $\hat{n}$ بنویسیم،

$$\vec{A} = \vec{A}_{\parallel} + \vec{\mathrm{A}}_{\perp},$$

آن‌وقت معلوم است که بردار ِ $\vec{A}_{\parallel}$ تحت ِ دوران حول ِ محور ِ $\hat{n}$ تغییر نمی‌کند. یعنی

$$\frac{d\vec{A}}{\mathrm{dt}} = \frac{d\vec{A}_\perp}{\mathrm{dt}}. \qquad (۳)$$

برای ِ محاسبه‌ی ِ آهنگ ِ تغییرات ِ $\vec{A}_\perp$ دست‌گاه ِ مختصاتی را در نظر بگیرید که محور ِ سوم آن در راستای ِ $\hat{n}$ باشد. در نتیجه بردار ِ $\vec{A}_\perp$ در صفحه‌ی ِ $(1,2)$ قرار دارد. می‌شود محور ِ 1 را طوری انتخاب کرد که

$$\vec{A}_\perp = \mathrm{A}_\perp(\cos\theta\,\hat{\mathrm{e}}_1 + \sin\theta\,\hat{\mathrm{e}}_2),$$

که در آن $\theta = \omega t$. $\hat{\mathrm{e}}_1$ و $\hat{\mathrm{e}}_2$ بردارهای ِ یکه‌ی ِ ثابتی هستند که هم‌راه ِ $\hat{n}$ یک دست‌گاه ِ مختصات ِ متعامد ِ راست‌گرد را می‌سازند. در نتیجه

$$\frac{d\vec{A}_\perp}{\mathrm{dt}} = \omega\mathrm{A}_\perp(-\sin\theta\hat{\mathrm{e}}_1 + \cos\theta\,\hat{\mathrm{e}}_2) = \vec{\omega} \times \vec{\mathrm{A}}_\perp. \qquad (۴)$$

چون $\vec{A}_\parallel$ موازی ِ $\vec{\omega}$ است $\vec{\omega} \times \vec{\mathrm{A}}_\parallel = 0$ و در نتیجه

$$\vec{\omega} \times \vec{A}_\perp = \vec{\omega} \times \vec{A}. \qquad (۵)$$

از نتایج ِ (۳) تا (۵) به ساده‌گی به معادله‌ی ِ (۲) می‌رسیم.

از آن جا که $\vec{\omega} = \omega\hat{n}$ و $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ رابطه‌ی ِ (۲) را می‌شود به این‌صورت هم نوشت:

$$\frac{d\vec{A}}{d\theta} = \hat{n} \times \vec{A}. \qquad (۶)$$

این معادله‌ی ِ برداری را می‌شود به صورت ِ یک دست‌گاه ِ معادلات ِ دیفرانسیل ِ خطی در نظر گرفت که جواب ِ آن با شرط ِ اولیه‌ی ِ $\vec{A}(0) = \vec{r}_0$ همان $\vec{r}(\theta)$ ای است که در سمت ِ چپ معادله‌ی ِ (۱) آمده. برای ساده‌گی و بدون ِ آن که از کلیت ِ مساله کم شود فرض کنید

$$\hat{n} = \cos\alpha\,\hat{z} + \sin\alpha\,\hat{y}, \qquad (۷)$$

که در آن α انحراف ِ محور ِ در از راستای قائم $(\hat{z})$ را نشان می‌دهد. با این انتخاب، معادله‌ی ِ (۶) به این صورت در می‌آید:

$$\frac{d\vec{A}}{\mathrm{d\theta}} = L_n\vec{A}, \qquad (۸)$$

که

$$L_n = \begin{pmatrix} 0 & -\cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (۹)$$

حلِ معادله‌یِ (۸) با رابطه‌یِ

$$\vec{A}(\theta) = e^{\theta L_n}\vec{A}(0), \qquad (۱۰)$$

داده می‌شود که در آن e به نمایِ یک ماتریس با رابطه‌یِ زیر تعریف می‌شود

$$e^{\theta L_n} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k {L_n}^k}{k!}, \qquad (۱۱)$$

که I ماتریس واحد است. از مقایسه‌یِ رابطه‌یِ (۱۰) با رابطه‌یِ (۱) معلوم می‌شود که

$$R_n(\theta) = e^{\theta L_n}.$$

به زبانِ نظریه‌یِ گروه، L_n را مولدِ دوران حولِ محور $\hat{n}$ می‌نامیم. محاسبه‌یِ ماتریس $R_n(\theta)$ آسان است. توجه کنید که

$$L_n = {R_x}^t(\alpha)\, L_z\, R_x(\alpha), \qquad (۱۲)$$

که در آن $R_x(\alpha)$ ماتریسِ دوران حولِ محور x به اندازه‌یِ α است،

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

${R_x}^t(\alpha)$ ترانهاده‌یِ آن است و

$$L_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

از آن جا که

$$R_x(\alpha){R_x}^t(\alpha) = I,$$

معلوم می‌شود که

$$L^k = {R_x}^t(\alpha)\, {L_z}^k R_x(\alpha).$$

با استفاده از تعریفِ (۱۱) می‌بینیم که

$$R_n(\theta) = {R_x}^t(\alpha) e^{\theta L_z} R_x(\alpha).$$

در این رابطه $e^{\theta L_z}$ همان ماتریسِ دوران به اندازه‌یِ θ حولِ محور z است. برایِ تحقیقِ درستیِ این موضوع توجه کنید که

$$(L_z)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

و در نتیجه ${L_z}^3 = -L_z$. پس،

$$e^{\theta L_z} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^{2k-1}(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} L_z$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

به همین دلیل L_z را مولدِ دوران حولِ محور z می‌نامند.

- تمرین: ماتریسِ L_x مولدِ دوران حولِ محور ِ x را بنویسید.

نتیجه‌یِ بحث این است که دوران به اندازه‌یِ θ حولِ محوری که در صفحه‌یِ (y, z) قرار دارد و با محور ِ z زاویه‌یِ α می‌سازد با رابطه‌یِ زیر داده می‌شود،

$$R_n(\theta) = {R_x}^t(\alpha) R_z(\theta) R_x(\alpha). \tag{۱۳}$$

حالا می‌توانیم انرژیِ پتانسیلِ گرانشی را برحسبِ زاویه‌یِ θ حساب کنیم. در وضعیتِ تعادل، در در صفحه‌یِ (y, z) قرار دارد. اگر در را به صورتِ یک مستطیلِ هم‌گن و یک‌نواخت به ارتفاعِ $2a$ و عرضِ $2b$ تصور کنیم آن‌گاه

$$\vec{r}_0 = {R_x}^t(\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ a \end{pmatrix}. \tag{۱۴}$$

این تساوی از آن جا به دست آمده که برایِ انحرافِ محور ِدر از راستایِ قائم باید در را حولِ محور ِ x به اندازه‌یِ زاویه‌یِ α و در جهتِ ساعت‌گرد بچرخانیم. ماتریسِ این دوران عبارت است از

$$R_x(-\alpha) = {R_x}^t(\alpha).$$

از روابطِ (۱)، (۱۳) و (۱۴) معلوم می‌شود که

$$\vec{r}(\theta) = {R_x}^t(\alpha) R_z(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \sin\theta \\ b\cos\theta\cos\alpha - a\sin\alpha \\ -b\cos\theta\sin\alpha + a\cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad (۱۵)$$

تساویِ دوم از جای‌گذاریِ ماتریس‌هایِ دوران به دست آمده است. تساویِ اول تعبیرِ قشنگی دارد. این تساوی می‌گوید که نتیجه‌یِ دورانِ θ حولِ محورِ موربِ $\hat{n}$ که در معادله‌ی (۱) خواسته شده، هم‌ارزِ آن است که اول در را حولِ محورِ قائم به اندازه‌یِ θ بچرخانیم و بعد آن را به اندازه‌یِ α و در جهتِ ساعت‌گرد حولِ محور x بچرخانیم.

از معادله‌یِ (۱۵) معلوم می‌شود که انرژیِ پتانسیل عبارت است از

$$V(\theta) = mgr_z(\theta) = mg(-b\cos\theta\sin\alpha + a\cos\alpha). \qquad (۱۶)$$

چون جمله‌یِ دوم یعنی $mga\cos\alpha$ ثابت است و نقشی در معادلاتِ حرکت ندارد، می‌شود آن را ننوشت.

- تمرین: درستیِ رابطه‌یِ (۱۶) را برایِ $\alpha = 0$ یعنی وقتی که محور ی در قائم است و $\alpha = \frac{\pi}{2}$ یعنی وقتی که محورِدر کاملا افقی است تحقیق کنید.

آن‌چه که تا این‌جا گفته شد دوران حولِ محوری که در صفحه‌یِ yz قرار دارد را به دست می‌دهد. برایِ کاملِ شدن بحث باید این قید را کنار بگذاریم و ماتریسِ دوران حولِ یک محورِ دل‌خواه را تعیین کنیم. موقعیتِ چنین محوری را می‌شود به ساده‌گی و با کمکِ دو زاویه‌یِ اولر تعیین کرد.

- تمرین: فرض کنید که به جایِ معادله‌یِ (۷)، بردارِ $\hat{n}$ با رابطه‌یِ زیر داده شود،

$$\hat{n} = \cos\alpha\ \hat{z} + \sin\alpha\ (\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y}) \qquad (۱۷)$$

با بازنویسیِ معادلاتِ (۶) و (۸) نشان دهید که

$$\begin{aligned} L_n &= R_z\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) R_x(\alpha)\ L_z\ {R_x}^t(\alpha) {R_z}^t\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= R_z(\varphi) R_y(\alpha)\ L_z\ {R_y}^t(\alpha) {R_z}^t(\varphi) \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

و در نتیجه

$$R_n(\theta) = R_z(\varphi) R_y(\alpha)\ R_z(\theta)\ {R_y}^t(\alpha) {R_z}^t(\varphi) \qquad (۱۹)$$

هرچند این اتحادها را برایِ نمایشِ پایه‌یِ گروهِ دوران به دست آوردیم ولی دامنه‌یِ درستیِ آن‌ها محدودِ به این نمایش نیست.

به عنوانِ آخرین مثال نشان می‌دهم که در مکانیکِ کوانتمی ماتریسِ دورانِ (۱۹) در نمایشِ مناسب، سهمِ برهم‌کنشِ حرکتِ مداریِ یک الکترون با میدانِ مغناطیسیِ ضعیفِ زمینه را به دست می‌دهد. در فیزیکِ کلاسیک انرژیِ پتانسیلِ برهم‌کنشِ ذره‌یِ بارداری به تکانه‌یِ $\vec{\ell}$ با میدانِ مغناطیسیِ $\vec{B} = B\hat{n}$ با رابطه‌یِ

$$V = \omega_L \hat{n}.\vec{\ell} \qquad (۲۰)$$

داده می‌شود که در آن ω_L بسامدِ لارمور است،

$$\omega_L = \frac{qB}{2m}.$$

برایِ به دست آوردنِ این رابطه توجه کنید که انرژیِ پتانسیلِ برهم‌کنشِ یک دوقطبیِ مغناطیسی $\vec{\mu}$ با میدانِ مغناطیسیِ $\vec{B}$ با

$$V = \vec{\mu}.\vec{B} \qquad (۲۱)$$

داده می‌شود. دوقطبیِ مغناطیسیِ حلقه‌یِ جریانی به سطحِ A و جریانِ I هم برابر است با $\mu = IA$. پس اگر فرض کنیم که ذره‌ای به بار q با بسامد $\upsilon = \frac{\omega}{2\pi}$ در مداری به شعاعِ a می‌گردد آن‌گاه با توجه به این که $\ell = m\omega a^2$ معلوم می‌شود که

$$\mu = (q\nu)(\pi a^2) = \frac{q\ell}{2m} \qquad (۲۲)$$

رابطه‌یِ (۲۰) از روابطِ (۲۱) و (۲۲) به دست می‌آید. در مکانیکِ کوانتمی سهمِ برهم‌کنشِ (۲۱) در عمل‌گرِ تحولِ زمانی عبارت است از

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{int}t} \qquad (۲۳)$$

که در آن

$$H_{int} = \omega_L \hat{n}.\mathcal{L} \qquad (۲۴)$$

یعنی به جایِ تکانه‌یِ مداریِ کلاسیکِ ℓ، عمل‌گرِ $\mathcal{L} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\vec{\mathrm{r}} \times \nabla$ را گذاشته‌ایم. عمل‌گرِ تکانه‌یِ زاویه‌ای $\mathcal{L}$ را می‌شود در نمایش ماتریسی هم نوشت. مثلاً

$$\mathcal{L}_{\mathrm{z}} = \mathrm{i}\hbar L_z. \qquad (۲۵)$$

که L_z مولد ِ دوران حول ِ محور ِ z است. پس در نمایش ِ ماتریسی

$$H_{int} = i\hbar\omega_L \hat{n}.L \tag{۲۶}$$

و در نتیجه

$$U(t) = e^{\omega_L t\,\hat{n}.L}. \tag{۲۷}$$

حالا نشان می‌دهم که $\hat{n}.L$ همان L_n داده شده در رابطه‌ی ِ (۱۸) است. آسان‌ترین راه برای ِ نشان دادن ِ این موضوع شاید این باشد که اثر ِ ماتریس ِ $\hat{n}.L$ را روی ِ یک بردار ِ دل‌خواه ِ

$$\vec{A} = (a_x \quad a_x \quad a_z)$$

حساب کنیم. به ساده‌گی می‌شود دید که

$$\hat{n}.L\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \hat{n} \times \vec{A}.$$

پس عمل‌گر ِ تحول ِ زمانی که در رابطه‌ی ِ (۲۷) داده شده همان ماتریس ِ دوران حول ِ محور ِ $\hat{n}$ به اندازه‌ی ِ زاویه‌ی ِ $\theta(t) = \omega_L t$ است.

خلاصه‌ی ِ این مقاله در یک جمله این است که عمل‌گر ِ برداری ِ $(\hat{n}\,\times)$ که در نمایش ِ ماتریسی با $\hat{n}.L$ داده می‌شود، مولدِ دوران حول ِ محور ِ مورب ِ $\hat{n}$ است.

قدردانی: از آقای ِ دکتر کیوان ِ آقابابایی سامانی و خانم ِ مریم ِ اشرفی که این نوشته را خواندند و برای به‌تر شدن ِ آن چند پیش‌نهاد ِ ارزش‌مند ارائه کردند سپاس‌گزارم.