درس‌نامه‌ی نسبیت

فرهنگ لران

دانش‌کده‌ی فیزیک، دانش‌گاه صنعتی اصفهان

این درس‌نامه بیش و کم شامل ِ مطالبی است که در درس ِ نسبیت در ترم ِ نخست ِ سال ِ تحصیلی ِ ۸۶–۸۵ در دوره‌ی ِ کارشناسی ارائه می‌شود. در این درس فرض شده است که دانش‌جویان مفاهیم ِ نسبیت ِ خاص را پیش‌تر در درس ِ فیزیک ِ جدید آموخته‌اند.

این درس‌نامه در طول ِ ترم و در سال‌های ِ آینده کامل‌تر خواهد شد.

فهرست مندرجات

۱ فضا—زمان مینکوفسکی و تبدیلات هم‌متری ۲

۱—۱ کلاس‌های تبدیلات هم‌متری ۳

۱—۲ تانسورها ۷

۱—۳ چهاربردار موج ۸

۱—۳—۱ معادله‌ی کلین—گوردن ۱۰

۲ الکترودینامیک ۱۲

۲—۱ چهار پتانسیل و تبدیلات پیمانه‌ای ۱۲

۲—۱—۱ چهاربردار پتانسیل ۱۳

۲—۲ پیش‌روی توماس ۱۶

فصل ۱

فضا—زمان مینکوفسکی و تبدیلات هم‌متری

فضا—زمان ِ مینکوفسکی با متریک ِ

$$\eta = \begin{pmatrix} -۱ & & & \\ & ۱ & & \\ & & ۱ & \\ & & & ۱ \end{pmatrix}, \qquad (۱.۱)$$

داده می‌شود. المان ِ طول ِ ds که فاصله‌ی ِ بین ِ دو روی‌داد ِ (x^μ) و $(x^\mu + dx^\mu)$ را می‌دهد، با رابطه‌ی ِ زیر داده می‌شود،

$$ds^۲ = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(dx^۰)^۲ + (d\vec{x})^۲. \qquad (۲.۱)$$

x^iها سه راستای ِ فضا را نمایش می‌دهند و $x^۰ = ct$. تحت ِ یک تبدیل ِ خطی که ds را ناوردا نگاه دارد،

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \qquad \det(\Lambda) \neq ۰, \qquad (۳.۱)$$

متریک ِ η به متریک ِ

$$\eta'_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta}, \qquad (۴.۱)$$

تبدیل می‌شود. تبدیلات ِ هم‌متری، آن دسته از تبدیلات ِ خطی هستند که متریک را عوض نکنند،

$$x^\mu \quad \to \quad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu,$$
$$\eta \quad \to \quad \eta' = \eta. \qquad (۵.۱)$$

به این ترتیب تبدیلات ِ هم‌متری از معادلات ِ (۴.۱) و (۵.۱) با رابطه‌ی ِ زیر داده می‌شوند،

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta}. \qquad (۶.۱)$$

برای ِ استفاده‌ی ِ بعدی رابطه‌ی ِ (۶.۱) را به صورت ِ زیر هم می‌نویسیم،

$$\eta = \Lambda^t \eta \Lambda, \qquad (۷.۱)$$

که در آن Λ^t ترانهاده‌ی ِ Λ است،

$$\Lambda^t{}_\nu{}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu. \qquad (۸.۱)$$

۱—۱ کلاس‌های تبدیلات هم‌متری

تمرین ۱—۱: در فضای ِ اقلیدسی، المان ِ طول با $ds_{\rm E}^۲ = d\vec{x}^۲$ داده می‌شود. نشان دهید تبدیلات ِ هم‌متری گروه ِ دوران ِ $SO(۳)$ است.

از رابطه‌ی ِ (۶.۱) برای ِ $\mu = \nu = ۰$ داریم،

$$-\left(\Lambda^۰_۰\right)^۲ + \sum_{i=۱}^{۳} \left(\Lambda^۰_i\right)^۲ = -۱. \qquad (۹.۱)$$

پس در تبدیلات ِ هم‌متری،

$$\left(\Lambda^۰_۰\right)^۲ \geq ۱. \qquad (۱۰.۱)$$

به علاوه از معادله‌ی ِ (۷.۱) به سادگی می‌شود دید که $(\det\Lambda)^2 = 1$. پس تبدیلات ِ هم‌متری در فضا—زمان ِ مینکوفسکی در چهار کلاس طبقه‌بندی می‌شوند،

آ. $\Lambda^0_{\ 0} \geq 1,\ \det(\Lambda) = 1$: این دسته از تبدیلات ِ هم‌متری همان تبدیلات ِ آشنای ِ لورنتس هستند. برای ِ تأیید ِ این موضوع، من برای ِ سادگی یک دنیای ِ $D = 1 + 1$ را در نظر می‌گیرم که با متریک ِ $\eta = -1, 1$ داده می‌شود. معادله‌ی ِ (۶.۱) را بنویسیم به سه معادله می‌رسیم،

$$\mu = \nu = 0: \quad \rightarrow \quad -1 = -\left(\Lambda^0_{\ 0}\right)^2 + \left(\Lambda^1_{\ 0}\right)^2, \tag{۱۱.۱}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mu = 0, \nu = 1 \\ \nu = 1, \mu = 0 \end{array}\right. : \quad \rightarrow \quad \Lambda^0_{\ 0}\Lambda^0_{\ 1} = \Lambda^1_{\ 0}\Lambda^1_{\ 1}, \tag{۱۲.۱}$$

$$\mu = \nu = 1: \quad \rightarrow \quad 1 = -\left(\Lambda^0_{\ 1}\right)^2 + \left(\Lambda^1_{\ 1}\right)^2. \tag{۱۳.۱}$$

حل ِ دو معادله‌ی ِ (۱۱.۱) و (۱۳.۱) را می‌شود به صورت ِ زیر نوشت:

$$\begin{array}{ll} \Lambda^0_{\ 0} = \cosh\alpha & \Lambda^1_{\ 0} = \sinh\alpha, \\ \Lambda^0_{\ 1} = \sinh\alpha' & \Lambda^1_{\ 1} = \cosh\alpha', \end{array} \tag{۱۴.۱}$$

که تا این جا β و β' دو پارامتر ِ دل‌خواه هستند. از معادله‌ی ِ (۱۲.۱) معلوم می‌شود که $\alpha' = \alpha$. پس گروه ِ تبدیلات ِ لورنتس در $1 + 1$ بعد یک گروه ِ یک پارامتری است. از آن جا که به ازای ِ هر αای می‌شود نوشت،

$$\begin{aligned} \cosh\alpha &= \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2}, \\ \sinh\alpha &= \beta\left(1 - \beta^2\right)^{-1/2}, \end{aligned} \tag{۱۵.۱}$$

$\Lambda(\beta)$ را می‌شود به صورت ِ زیر نوشت،

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma, \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}, \tag{۱۶.۱}$$

که در آن $\gamma = \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2}$. برای ِ آن که نشان دهیم تبدیل ِ هم‌متری که با $\Lambda(\beta)$ داده می‌شود یک تبدیل ِ لورنتس است کافی است نشان دهیم که $\beta = u/c$ که u سرعت ِ ناظر ِ x' نسبت به ناظر ِ x است.

تمرین ۱—۲: این مطلب را با نوشتن ِ روی‌داد ِ مبدأ ِ دست‌گاه ِ x در دست‌گاه ِ x'، اثبات کنید. یادآوری: روی‌داد ِ مبدأ ِ دست‌گاه ِ x با $dx^\mu = 0$ داده می‌شود.

تمرین ۱—۳: تبدیلات ِ هم‌متری را در فضا—زمان ِ $3 + 1$ بعدی به دست آورید و نشان دهید که یک گروه ِ چهار پارامتری است. در این مسأله یک پارامتر خیز و سه پارامتر ِ دیگر دوران‌های ِ $SO(3)$ را می‌دهند.

ب. $\Lambda^\circ{}_\circ \geq 1, \det(\Lambda) = -1$: **یک مثال از این دسته از تبدیلات ِ هم‌متری، تبدیل ِ پاریته یا وارونی ِ فضایی است که با**

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \qquad (1.17)$$

داده می‌شود. در این تبدیل،

$$\begin{aligned} x^\circ &\rightarrow x'^\circ = x^\circ, \\ x^i &\rightarrow x'^i = -x^i, \qquad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \qquad (1.18)$$

تمرین ۱—۴: نشان دهید $P^2 = 1$.

تمرین ۱—۵: نشان دهید که یک نگاشت ِ یک به یک بین ِ کلاس‌های ِ (آ) و (ب) برقرار است.

تمرین ۱—۶: اگر Λ یک عضو ِ کلاس ِ (آ) باشد نشان دهید که $\Lambda^{-1} = P\Lambda^t P$.

راه‌نمایی: $P\eta = \eta P = -1$.

پ. $\Lambda^\circ_\circ \leq ۱,\ \det(\Lambda) = -۱$: یک مثال از این دسته از تبدیلات ِ هم‌متری، تبدیل ِ وارونی ِ زمانی است که با

$$T = \begin{pmatrix} -۱ & & & \\ & ۱ & & \\ & & ۱ & \\ & & & ۱ \end{pmatrix}, \tag{۱۹.۱}$$

داده می‌شود. در این تبدیل،

$$\begin{aligned} x^\circ &\rightarrow x'^\circ = -x^\circ, \\ x^i &\rightarrow x'^i = x^i, \qquad i = ۱, ۲, ۳. \end{aligned} \tag{۲۰.۱}$$

تمرین ۱—۷: نشان دهید $T^۲ = ۱$.

تمرین ۱—۸: نشان دهید که یک نگاشت ِ یک به یک بین ِ کلاس‌های ِ (آ) و (پ) برقرار است.

تمرین ۱—۹: اگر Λ یک عضو ِ کلاس ِ (آ) باشد نشان دهید که $T\Lambda^tT = \Lambda^{-۱}$.

تمرین ۱—۱۰: نشان دهید $[P,T] = \circ$.

ت. $\Lambda^\circ_\circ \leq ۱,\ \det(\Lambda) = ۱$: یک مثال از این دسته از تبدیلات ِ هم‌متری، تبدیل ِ PT است.

تمرین ۱—۱۱: نشان دهید که یک نگاشت ِ یک به یک بین ِ کلاس‌های ِ (آ) و (ت) برقرار است.

تمرین ۱—۱۲: نشان دهید $(PT)^۲ = ۱$.

۱—۲ تانسورها

کمیتِ A^μ یک چهاربردارِ پادوردا یا contravariant تحتِ تبدیلِ Λ است اگر تحتِ تبدیلِ $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^{-1\mu}{}_\nu x^\nu$،

$$A^\mu \to A'^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\mu(x). \quad (۲۱.۱)$$

دقت کنید که چون کمیتِ A از دست‌گاهِ مختصات مستقل است $A'(x') = A(x)$. در تمامیِ تعریف‌هایی که در پایین می‌آید به این نکته توجه داشته باشید. هم‌چنین کمیتِ A_μ را یک چهاربردارِ هم‌وردا یا covariant می‌نامیم اگر تحتِ همان تبدیلِ مختصات،

$$A_\mu \to A'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu, \quad (۲۲.۱)$$

که در این جا،

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta \eta^{\beta\nu} \quad (۲۳.۱)$$

تمرین ۱—۱۳: نشان دهید $\Lambda_\mu{}^\nu = \Lambda^{-1\mu}{}_\nu$.

تمرین ۱—۱۴: نشان دهید اگر A^μ یک چهاربردارِ پادوردا باشد آن‌گاه $A_\mu = \eta_{\mu\nu}A^\nu$ یک چهاربردارِ هم‌وردا است.

تمرین ۱—۱۵: نشان دهید چهاربردارِ سرعت $u^\mu = dx^\mu/ds$ یک چهاربردارِ پادوردا است.

کمیتِ $\phi(x)$ را یک اسکالر می‌نامیم اگر تحتِ تبدیلِ مختصات ناوردا باشد یعنی، $\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x)$. در فیزیکِ ام‌روز فرض بر این است که جرمِ سکونِ ذراتِ بنیادی و بارِ الکتریکی تحتِ تبدیلاتِ لورنتس اسکالراند.

تمرین ۱—۱۶: نشان دهید اگر $\phi(x)$ تحتِ تبدیلِ انتقالِ $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ یک اسکالر باشد آن گاه $\phi(x)$ یک تابعِ متناوب با دوره‌یِ تناوب a است.

تمرین ۱—۱۷: نشان دهید اگر A^μ یک چهاربردار ِ پادوردا باشد آن‌گاه $A_\mu A^\mu$ یک اسکالر است.

تمرین ۱—۱۸: نشان دهید اگر u^μ چهاربردار ِ سرعت باشد آن‌گاه $u_\mu u^\mu = 1$.

$F_{\mu\nu}$ را یک تانسور ِ هم‌وردای ِ رتبه‌ی ِ دو می‌دانیم اگر تحت ِ تبدیل ِ $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^{-1\mu}{}_\nu x^\nu$،

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta F_{\alpha\beta}. \tag{۲۴.۱}$$

تانسور ِ رتبه‌ی ِ دوی ِ پادوردا به طور ِ مشابه تعریف می‌شود،

$$G^{\mu\nu} \to G'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta G^{\alpha\beta}. \tag{۲۵.۱}$$

تمرین ۱—۱۹: نشان دهید $F^\mu_\mu = \eta^{\mu\nu}F_{\nu\mu}$ یک اسکالر است.

تمرین ۱—۲۰: نشان دهید اگر $F_{\mu\nu}$ یک تانسور ِ رتبه‌ی ِ دوی ِ هم‌دوردا باشد آن‌گاه $\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$ یک تانسور ِ رتبه‌ی ِ دوی ِ پادوردا است.

تمرین ۱—۲۱: نشان دهید اگر A^μ و B^μ چهاربردار ِهای ِ پادوردا باشند آن‌گاه

۱. $A^\mu B^\nu$ یک تانسور ِ رتبه‌ی ِ دوی ِ پادوردا است.

۲. $A^\mu B^\nu F_{\mu\nu}$ یک اسکالر است.

۳. $A^\mu F_{\mu\nu}$ یک چهاربردار ِ هم‌وردا است.

۱—۳ چهاربردار موج

یک موج ِ تخت را می‌شود با تابع ِ $e^{i\theta(t,\vec{x})}$ نمایش داد که در آن،

$$\theta(t,\vec{x}) = \omega t - \vec{k}.\vec{x}, \tag{۲۶.۱}$$

فازِ موجِ تخت است. فازِ یک موج یک عدد است که می‌شود آن را برایِ برچسب زدنِ هر جبهه‌یِ موج به کار برد. به سادگی می‌شود دید که جبهه‌هایِ موج با سرعتِ

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\left|\vec{k}\right|}, \tag{۲۷.۱}$$

به پیش می‌روند. از این رو v_{ph} را سرعتِ فاز می‌نامند. سرعتِ فاز برایِ امواجِ نوری که در خلأ منتشر می‌شوند c است.

فاز را یک کمیتِ اسکالرِ لورنتسی می‌گیریم. از این جا معلوم می‌شود که k^μ که با رابطه‌یِ زیر تعریف می‌شود،

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right), \tag{۲۸.۱}$$

یک چهار بردارِ پادوردا است و $\phi = k_\mu x^\mu$.

تمرین ۱—۲۲: ابتدا نشان دهید که عملگرِ $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ تحتِ تبدیلاتِ لورنتس پادوردا است. سپس با فرضِ آن که فازِ θ یک اسکالر است به کمکِ معادله‌یِ (۲۶.۱) نشان دهید که k^μ یک چهاربردارِ پادوردا است.

تمرین ۱—۲۳: روابطِ دوپلر را به دست آورید.

این که k^μ در معادله‌یِ (۲۸.۱) یک چهاربردارِ پادوردا است با نظریه‌یِ دوگانیِ موج—ذره در توافق است. چرا که از یک سو چهارتکانه‌یِ $p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}$ یک چهاربردارِ پادوردا است[۱] و از سویِ دیگر برطبقِ دوگانیِ موج—ذره $E = \hbar\omega$ و $\vec{p} = \hbar\vec{k}$.

[۱] τ زمانِ ویژه است که در چارچوبِ سکونِ ذره سنجیده می‌شود

۱–۳–۱ معادله‌ی کلین–گوردن

معادله‌ی ِ کلین–گوردن Klein-Gordon یک معادله‌ی ِ موج ِ کوانتمی برای ِ یک ذره‌ی ِ نسبیتی است. از تعریف ِ $p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}$ و با توجه به تعریف ِ (۲.۱) می‌دانیم که

$$\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = -m^۲. \qquad (۲۹.۱)$$

در به دست آوردن ِ معادله‌ی ِ بالا توجه کنید که $d\tau^۲ = -ds^۲$. با استفاده از نسخه‌ی ِ کوانتش ِ

$$p_\mu \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad (۳۰.۱)$$

که تعمیمی از نسخه‌ی ِ $\vec{p} \to -\imath\hbar\nabla$ در مکانیک ِ کوانتمی ِ شرودینگری است، معادله‌ی ِ (۲۹.۱) به معادله‌ی ِ کلین–گوردون منجر می‌شود،

$$(\Box - m^۲)\phi = ۰. \qquad (۳۱.۱)$$

که در آن عمل‌گر ِ $\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ همان دالامبری است،

$$\Box = -\partial_۰^۲ + \vec{\partial}^۲, \qquad (۳۲.۱)$$

و ϕ تابع ِ موج ِ کوانتمی است. از معادله‌ی ِ (۳۱.۱) می‌بینیم که معادله‌ی ِ کلین–گوردن همان معادله‌ی ِ موج ِ کلاسیک است.

تمرین ۱–۲۴: سرعت ِ گروه ِ یک بسته موج را با

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}, \qquad (۳۳.۱)$$

تعریف می‌کنیم. نشان دهید که v_g از رابطه‌ی ِ جمع ِ نسبیتی ِ سرعت‌ها پی‌روی می‌کند.

تمرین ۱–۲۵: نشان دهید که برای ِ موج ِ تخت ِ کلین–گوردن $\omega = \sqrt{k^۲ + m^۲/\hbar^۲}$. سپس نشان دهید که سرعت ِ گروه ِ این موج همان سرعت ِ ذره‌ی ِ نظیر ِ آن است. درباره‌ی ِ سرعت ِ فاز چه می‌توانید بگویید؟

تمرین ۱–۲۶: هم‌وردایی ِ معادله‌ی ِ کلین–گوردن زیر ِ تبدیلات ِ لورنتس:

آ. نشان دهید که اگر $\phi(x)$ حلی از معادله‌ی ِ کلین—گوردن باشد آن‌گاه $\phi(\Lambda x)$ که در آن Λ یک تبدیل ِ هم‌متری است هم حلی از معادله است.

ب. آیا تمام ِ جواب‌های ِ این معادله تحت ِ تبدیل‌های ِ هم‌متری اسکالر هستند؟ آیا جوابی هست که اسکالر ِ لورنتسی باشد اما تحت ِ پاریته ناوردا نباشد؟ آیا جواب ِ این معادله می‌تواند یک چهاربردار باشد؟

پ. قسمت‌های ِ (آ.) و (ب.) را برای ِ معادله‌ی ِ لاپلاس که میدان ِ الکتریکی در یک کاوه‌ی ِ کروی را توصیف می‌کند تکرار کنید و در هر قسمت مثالی بیاورید.

توجه:

دقت کنید که واژه‌ای چون چهار بردار در دو معنا به کار می‌رود. یک میدان ِ چهاربرداری مثل ِ چهاربردار ِ پادوردای ِ $A^\mu(x)$ کمیتی است که شرط ِ $A^\mu(\Lambda x) = (\Lambda A)^\mu(x)$ را برآورده می‌کند. اما چهاربردارهایی مثل ِ چهاربردار ِ سرعت هم هستند که میدان نیستند و تحت ِ تبدیل ِ مختصات از دست‌گاهی به دست‌گاه ِ دیگر از قاعده‌ی ِ تبدیل ِ $A^\mu \to A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$ پیروی می‌کنند.

فصل ۲

الکترودینامیک

در این فصل فرمول بندی ِ هم‌وردای ِ لورنتسی ِ نظریه‌ی ِ الکترودینامیک ِ ماکسول را به دست می‌آوریم. به یاد بیاورید که روابط ِ ماکسول هر چند با دیدگاه ِ گالیله‌ای نوشته شده بودند اما نشان می‌دادند که سرعت ِ انتشار ِ امواج ِ الکترومغناطیسی در تمام ِ چارچوب‌های ِ لخت یکی است. مشاهده‌ای که با نسبیت ِ گالیله نمی‌خواند اما با نظریه‌ی ِ نسبیت ِ خاص به روشنی سازگار است. از این رو هم‌وردایی ِ لورنتسی را باید بشود در قوانین ِ الکترودینامیک آشکارا دید.

مطالب ِ این فصل را می‌توانید در فصل‌های ِ ۱۱ و ۱۲ از کتاب ِ الکترودینامیک ِ جکسون که معمولاً در مقطع ِ کارشناسی ِ ارشد تدریس می‌شود بیابید.

۲—۱ چهار پتانسیل و تبدیلات پیمانه‌ای

در این بخش قوانین ِ الکترودینامیک را برحسب ِ پتانسیل‌های ِ اسکالر و برداری به دست آورده و تبدیلات ِ پیمانه‌ای را توضیح می‌دهم. مطالب ِ این بخش در دیدگاه ِ گالیله‌ای ارایه می‌شود و ارتباطی با نسبیت ِ خاص ندارد. واژه‌ی ِ اسکالر یا بردار هم به تبدیلات ِ گالیله‌ای (دوران‌های فضای ِ اقلیدسی یا همان گروه ِ $SO(3)$) اشاره دارد.

از دو قانون ِ هم‌گن از چهار قانون ِ الکترومغناطیس ِ ماکسول یعنی از

$$\nabla.\vec{B} = \circ, \quad (۱.۲)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = \circ, \quad (۲.۲)$$

می‌شود دید که میدان‌های ِ $\vec{E}$ و $\vec{B}$ را می‌شود برحسب ِ پتانسیل ِ اسکالر ِ ϕ و پتانسیل ِ برداری ِ $\vec{A}$ نوشت،

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \partial_t \vec{A}, \quad (۳.۲)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (۴.۲)$$

از روابط ِ بالا می‌شود دید که $(\vec{E}, \vec{B})$، چهار پتانسیل ِ ϕ و $\vec{A}$ را به طور ِ یکتا به دست نمی‌دهد. در واقع نظیر ِ هر تابع ِ دل‌خواه ِ ψ می‌شود از ϕ و $\vec{A}$ پتانسیل‌های ِ جدیدی را ساخت که همان $\vec{E}$ و $\vec{B}$ را بدهند،

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi, \quad (۵.۲)$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \partial_t \phi. \quad (٦.۲)$$

به عبارت ِ دیگر ϕ' و $\vec{A}'$ از روابط ِ (۳.۲) و (۴.۲) به همان $\vec{E}$ و $\vec{B}$ منجر می‌شوند که ϕ و $\vec{A}$. به این ویژگی آزادی ِ پیمانه‌ای می‌گویند.

۲—۱—۱ چهاربردار پتانسیل

در این جا نشان می‌دهیم که چهار پتانسیل ِ ϕ و $\vec{A}$ یک چهار بردار ِ پادوردا می‌سازند که مؤلفه‌های ِ آن با

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}), \quad (۷.۲)$$

داده می شوند.

ابتدا توجه کنید که قانون ِ نیروی ِ لورنتس

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right), \qquad (۸.۲)$$

و قانون ِ کار و انرژی،

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E} = q\vec{v}.\vec{E}, \qquad (۹.۲)$$

برحسب ِ چهار پتانسیل به صورت ِ زیر داده می‌شوند،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{p} &= q\left[-\nabla\left(\phi - \vec{v}.\vec{A}\right) - \left(\partial_t + \vec{v}.\nabla\right)\vec{A}\right], \\ \frac{d}{dt}\mathcal{E} &= -q(\vec{v}.\nabla + \partial_t)\phi + q\left(\partial_t\phi - \vec{v}.\partial_t\vec{A}\right). \end{aligned} \qquad (۱۰.۲)$$

برای ِ به دست آوردن ِ تساوی ِ اول از قاعده‌ی ِ

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{B}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

استفاده کرده‌ام. در سمت ِ راست ِ تساوی ِ دوم هم یک بار $\partial_t\phi$ را اضافه و کم کرده‌ام. روابط ِ (۱۰.۲) را می‌شود برحسب ِ زمان‌ویژه‌ی ِ ذره‌ی ِ باردار ِ q،

$$d\tau = \gamma^{-1}dt \qquad (۱۱.۲)$$

و چهاربردار ِ سرعت ِ ذره،

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\gamma, \gamma\vec{v}), \qquad (۱۲.۲)$$

به صورت ِ زیر نوشت،

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\vec{p} &= q\left[-\nabla\left(u^\circ\phi - \vec{u}.\vec{A}\right) - u^\mu\partial_\mu\vec{A}\right], \\ \frac{d}{d\tau}\mathcal{E} &= -qu^\mu\partial_\mu\phi + q\left(u^\circ\partial_\circ\phi - \vec{u}.\partial_\circ\vec{A}\right). \end{aligned} \qquad (۱۳.۲)$$

که در آن $\partial_\mu = (\partial_\circ, \nabla)$.

از آن جا که سه بردار ِ $\vec{p}$ و انرژی ِ $\mathcal{E}$ مؤلفه‌های ِ چهاربردار ِ پادوردای ِ تکانه یعنی $p^\mu = (\mathcal{E}, \vec{p})$ هستند و ∇ هم قسمت ِ فضایی ِ چهاربردار ِ پادوردای ِ $\partial^\mu = (-\partial_\circ, \nabla)$ را می‌سازد از اولین جمله در سمت ِ راست ِ تساوی ِ اول معلوم می‌شود که چهار پتانسیل ِ ϕ و $\vec{A}$ مؤلفه‌های ِ یک چهاربردار هستند. این مشاهده با توجه به جملات ِ دیگر در دو تساوی ِ بالا تأیید می‌شود. مثلاً با توجه به آن که $u^\mu \partial_\mu$ یک اسکالر ِ لورنتسی است دومین جمله در تساوی ِ اول می‌گوید که $\vec{A}$ هم‌چون $\vec{p}$ قسمت ِ فضایی ِ یک چهاربردار را می‌سازد.

در پایان می‌شود هر دو قانون ِ نیروی ِ لورنتس و کار و انرژی را برحسب ِ چهاربردار ِ پتانسیل ِ $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ به صورت ِ زیر داد،

$$\frac{d}{d\tau} p_\nu = q u^\mu F_{\nu\mu}, \qquad (۱۴.۲)$$

که در آن

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\mu A_\nu, \qquad (۱۵.۲)$$

است. **تمرین ۲—۱:** نشان دهید که $F_{\mu\nu}$ یک تانسور ِ هم‌دوردا است.

تمرین ۲—۲: نشان دهید که $F_{\mu\nu}$ پیمانه ناوردا است.

تمرین ۲—۳: درایه‌های ِ F را برحسب ِ میدان‌های ِ $\vec{E}$ و $\vec{B}$ حساب کنید.

تمرین ۲—۴: نشان دهید دو قانون ِ ناهم‌گن ِ ماکسول با $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ داده می‌شود که در آن

$$j^\nu = (\rho, \vec{j}), \qquad (۱۶.۲)$$

چهار بردار ِ جریان است. از این جا نشان دهید که بار ِ الکتریکی پایسته است یعنی

$$\partial_\mu j^\mu = \circ. \qquad (۱۷.۲)$$

تمرین ۲—۵: میدان‌های ِ الکتریکی و مغناطیسی ِ ناشی از یک ذره‌ی ِ باردار به بار ِ q را به دست آورید.

راه‌نمایی: F را در دست‌گاه ِ سکون ِ ذره بنویسید و تبدیلات ِ لورنتس را به کار بگیرید.

۲—۲ پیش‌روی توماس

اگر به یک الکترون که در میدان ِ الکترومغناطیسی حرکت می‌کند نگاه کنیم می‌بینیم که جهت ِ ممان ِ دو قطبی ِ مغناطیسی ِ آن مرتب تغییر می‌کند. بخشی از این پدیده ناشی از برهم‌کنش ِ ممان ِ دو قطبی با میدان ِ مغناطیسی است و بخش ِ دیگر ناشی از برهم‌کنش ِ آن با میدان ِ الکتریکی است. در مکانیک ِ کوانتمی برهم‌کنش ِ ممان ِ دوقطبی ِ الکترون با میدان ِ مغناطیسی اثر ِ نابهنجار ِ زیمن را می‌دهد و برهم‌کنش ِ آن با میدان ِ الکتریکی برهم‌کنش ِ اسپین—مدار را می‌دهد. داستان از سال ِ ۱۹۲۶ آغاز شد که Uhlenbeck و Goudsmith ایده‌ی ِ اسپین ِ الکترون را پیش‌نهاد دادند. ممان ِ دوقطبی ِ الکترون برحسب ِ اسپین آن با رابطه‌ی ِ زیر داده می‌شود،

$$\vec{\mu} = \frac{ge}{۲mc}\vec{s}, \qquad (۱۸.۲)$$

که g ثابتی است که مقدارش را باید از آزمایش‌گاه به دست آورد.

فرض کنید که الکترونی با سرعت ِ $\vec{v}$ در یک میدان ِ الکتریکی ِ $\vec{E}$ و میدان ِ مغناطیسی ِ $\vec{B}$ حرکت کند. در دستگاه ِ سکون ِ الکترون، برهم‌کنش ِ ممان ِ دوقطبی با میدان ِ خارجی با

$$\left(\frac{d\vec{s}}{dt}\right)_{restframe} = \vec{\mu}\times\vec{B}', \qquad (۱۹.۲)$$

داده می‌شود. $\vec{B}'$ یعنی میدان ِ مغناطیسی در دستگاه ِ سکون ِ الکترون برحسب ِ میدان‌های ِ الکتریکی و مغناطیسی ِ $\vec{E}$ و $\vec{B}$، البته در حد ِ غیر ِ نسبیتی، با رابطه‌ی ِ زیر داده می شود،

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{E}. \qquad (۲۰.۲)$$

تمرین ۲—۶: رابطه‌ی ِ (۲۰.۲) را به دست آورید.

از روابط ِ (۱۹.۲) و (۲۰.۲) می‌شود دید که برهم‌کنش ِ ممان ِ دوقطبی ِ مغناطیسی با

میدان‌های ِ الکتریکی و مغناطیسی با پتانسیل ِ زیر داده می‌شود،

$$U=\vec{\mu}.\left(\vec{B}-\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{E}\right). \qquad (۲۱.۲)$$

تمرین ۲—۷: رابطه‌ی ِ (۲۱.۲) را به دست آورید.

در یک اتم میدان ِ الکتریکی با یک پتانسیل ِ $V(r)$ داده می‌شود. در نتیجه میدان ِ الکتریکی با

$$\vec{E}=-\frac{\vec{r}}{r}\frac{dV}{dr}, \qquad (۲۲.۲)$$

داده می‌شود. از این جا پتانسیل ِ برهم‌کنش ِ اسپین ِ الکترون در یک اتم با رابطه‌ی ِ زیر داده می‌شود،

$$U=-\frac{ge}{۲mc}\vec{s}.\vec{B}+\frac{ge}{۲m^{۲}c^{۲}}\vec{s}.\vec{L}\frac{۱}{r}\frac{dV}{dr}. \qquad (۲۳.۲)$$

تمرین ۲—۸: رابطه‌ی ِ (۲۳.۲) را به دست آورید.

اگر $g=۲$ باشد جمله‌ی ِ اول اثر ِ نابهنجار ِ زیمن را می‌دهد اما سهم ِ اسپین—مدار که با جمله‌ی ِ دوم داده می‌شود دو برابر ِ مقدار ِ تجربی ِ آن به دست می‌آید.

در ۱۹۲۷ توماس نشان داد که این اشکال با در نظر گرفتن آثار ِ نسبیتی به درستی برطرف می‌شود. برای ِ به دست آوردن ِ شکل ِ درست ِ این برهم‌کنش ابتدا باید شکل ِ هم‌وردای ِ لورنتسی ِ معادله‌ی ِ (۱۹.۲) را به دست می‌آوریم. پیش از انجام ِ این کار به عنوان ِ یک تمرین و برای ِ آن که مفهوم ِ هم‌وردا سازی ِ یک رابطه تحت ِ یک تبدیل را بهتر بفهمیم، شکل ِ هم‌وردای ِ تبدیل ِ خیز تحت ِ دوران را به دست می‌آورم. نتیجه‌ی ِ نهایی خیلی به درد می‌خورد چون خیز در هر راستای ِ دل‌خواهی را خواهد داد.

برای ِ این کار ابتدا یادآوری می‌کنم که تبدیل ِ خیز در راستای ِ محور ِ $\hat{x}$ با رابطه‌ی ِ زیر داده

می‌شود،

$$t' = \gamma t - \gamma\beta x, \tag{۲۴.۲}$$

$$x' = \gamma x - \gamma\beta t, \tag{۲۵.۲}$$

$$y' = y, \tag{۲۶.۲}$$

$$z' = z. \tag{۲۷.۲}$$

در واقع $\hat{x}$ چیزی جز یک بردارِ یکه در جهت. بردارِ خیزِ $\vec{\beta}$ نیست. به عبارتِ دیگر x مؤلفه‌یِ بردارِ مکانِ $\vec{x}$ در راستایِ جهتِ خیز است که با بردارِ یکه‌یِ $\hat{\beta}$ داده می‌شود. با این توضیحات می‌شود شکلِ هم‌وردایِ (تحتِ دورانِ) روابطِ (۲۴.۲) و (۲۵.۲) را به سادگی به دست آورد،

$$\begin{aligned} t' &= \gamma t - \gamma\vec{\beta}.\vec{x}, \\ \hat{\beta}.\vec{x} &= \gamma\hat{\beta}.\vec{x} - \gamma\beta t. \end{aligned} \tag{۲۸.۲}$$

y و z مؤلفه‌هایِ بردارِ مکانِ $\vec{x}$ در صفحه‌یِ عمود بر جهتِ خیز هستند. این مؤلفه‌ها را می‌شود بر حسبِ مؤلفه‌هایِ بردارِ $\hat{\beta}\times\vec{x}$ نوشت. به این ترتیب معادلاتِ (۲۶.۲) و (۲۷.۲) تنها می‌گویند که بردارِ $\hat{\beta}\times\vec{x}$ تحتِ خیز ناوردا است. پس می‌شود معادلاتِ (۲۶.۲) و (۲۷.۲) را به شکلِ هم‌وردایِ زیر نوشت،

$$\hat{\beta}\times\vec{x}' = \hat{\beta}\times\vec{x}. \tag{۲۹.۲}$$

معادلاتِ (۲۸.۲) و (۲۹.۲) را می‌شود به شکلِ زیر نوشت،

$$\begin{aligned} t' &= \gamma t - \gamma\vec{\beta}.\vec{x}, \\ \vec{x}' &= \vec{x} + \frac{\gamma - ۱}{\beta^۲}(\vec{\beta}.\vec{x})\vec{\beta} - \gamma\vec{\beta}t. \end{aligned} \tag{۳۰.۲}$$

می‌بینید که این رابطه تنها برحسبِ بردارها و اسکالرهایِ گروهِ دورانِ $SO(۳)$ نوشته شده است و به این معنا هم‌وردا است.

تمرین ۲—۹: رابطه‌ی ِ (۳۰.۲) را به دست آورید.

برای ِ به دست آوردن ِ شکل ِ هم‌وردای ِ لورنتسی ِ معادله‌ی ِ (۱۹.۲) ابتدا باید جای‌گزینی برای ِ $\vec{s}$ بیابیم. طبیعی‌ترین جای‌گزین برای ِ یک سه بردار یک چهاربردار است. پس $\vec{s}$ را با چهاربردار ِ S^μ جای‌گزین می‌کنیم. S^μ چهاربرداری است که در دست‌گاه ِ سکون ِ الکترون مؤلفه‌ی ِ صفرم آن صفر باشد و مؤلفه‌های ِ فضایی‌اش هم همان مؤلفه‌های ِ $\vec{s}$ باشد،

$$S'^{\circ} = \circ, \qquad \vec{S'} = \vec{s}. \tag{۳۱.۲}$$

از این جا و به کمک ِ معادله‌ی ِ (۳۰.۲) می‌شود دید که در هر دست‌گاه ِ لخت ِ دیگری

$$S^{\circ} = \vec{\beta}.\vec{S}. \tag{۳۲.۲}$$

تمرین ۲—۱۰: نشان دهید که

$$\vec{S} = \vec{s} + \frac{\gamma^{۲}}{\gamma + ۱}(\vec{\beta}.\vec{s})\vec{\beta}. \tag{۳۳.۲}$$

از این معادله چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

از آن جا که معادله‌ی ِ (۱۹.۲) در دست‌گاه ِ سکون ِ الکترون نوشته شده است پس به جای ِ t در سمت ِ چپ ِ این معادله می‌شود τ یعنی زمان ِ ویژه را گذاشت که از قضا یک ناوردای ِ لورنتسی است. حالا باید شکل ِ هم‌وردای ِ برهم‌کنش در سمت ِ راست ِ معادله‌ی ِ (۱۹.۲) را پیدا کنیم. واضح است که به جای ِ $\vec{B'}$ باید $F^{\mu\nu}$ بگذاریم. در واقع تنها تانسورهایی که برای ِ ساختن ِ سمت ِ راست ِ معادله‌ی ِ (۱۹.۲) در دست داریم عبارتند از $F^{\mu\nu}$، S^μ و چهاربردار ِ سرعت u^μ. چون سمت ِ چپ ِ معادله‌ی ِ (۱۹.۲) را به صورت ِ $dS^\mu/d\tau$ می‌نویسیم هر چهاربردار ِ پادوردایی که بشود با این تانسورها ساخت را باید در نظر گرفت. منتها فرض می‌کنیم که جمله‌ی ِ برهم‌کنش برحسب ِ S^μ و $F^{\mu\nu}$ خطی باشد. تنها سه جمله از این دست وجود دارد،

$$F^{\mu\nu}S_\nu, \quad S_\lambda F^{\lambda\nu}u_\nu u^\mu, \quad S_\beta \frac{du^\beta}{d\tau}u^\mu. \tag{۳۴.۲}$$

تمرین ۲—۱۱: دو جمله‌ی ِ مجاز ِ دیگر عبارتند از،

$$F^{\mu\nu}u_\nu S_\lambda u^\lambda, \quad u_\lambda F^{\lambda\nu}u_\nu S^\mu. \tag{۳۵.۲}$$

نشان دهید دهید این دو جمله متحد با صفر هستند.

تمرین ۲—۱۲: یک جمله‌ی ِ مجاز ِ دیگر $S_\lambda F^{\lambda\nu}u_\nu \frac{du^\mu}{d\tau}$ است. نشان دهید که این جمله بر حسب ِ F از مرتبه‌ی ِ دوم است.

پس کلی ترین شکل ِ هم‌وردای ِ معادله‌ی ِ (۱۹.۲) می‌تواند به این صورت باشد،

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = A_۱ F^{\mu\nu}S_\nu + A_۲ S_\lambda F^{\lambda\nu}u_\nu u^\mu + A_۳ S_\beta \frac{du^\beta}{d\tau}u^\mu. \tag{۳۶.۲}$$

ضرایب ِ $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ در این معادله را باید از این شرط به دست آورد که در حد ِ غیر ِ نسبیتی این معادله به همان معادله‌ی ِ (۱۹.۲) منجر شود. اما پیش از بررسی ِ حد ِ غیر ِ نسبیتی دقت می‌کنیم که چون در دستگاه ِ سکون ِ الکترون $S'^۰ = ۰$ پس $u_\mu S^\mu = ۰$. از این جا معلوم می‌شود که

$$u_\mu \frac{dS^\mu}{d\tau} + \frac{du^\mu}{d\tau}S_\mu = ۰. \tag{۳۷.۲}$$

به کمک ِ این اتحاد، از معادله‌ی ِ (۳۶.۲) معلوم می‌شود که

$$(A_۱ - A_۲)u_\mu F^{\mu\nu}S_\nu + (۱ + A_۳)S_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = ۰. \tag{۳۸.۲}$$

پس،

$$A_۱ = A_۲, \qquad A_۳ = -۱, \tag{۳۹.۲}$$

چرا که تساوی ِ (۳۷.۲) باید همیشه چه در غیاب ِ نیروهای ِ الکترومغناطیسی و چه در حضور ِ نیروهایی به جز آن هایی که از برهم‌کنش ِ الکترومغناطیسی می آیند درست باشد.

تمرین ۲—۱۳: با در نظر گرفتن ِ حد ِ غیر ِ نسبیتی نشان دهید که $A_۱ = ge/۲mc$.

تمرین ۲–۱۴: با استفاده از معادله‌ی ِ حرکت ِ (۱۴.۲) نشان دهید که در غیاب ِ نیروهای ِ غیر ِ الکترومغناطیسی،

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc}\left[\frac{g}{۲}F^{\mu\nu}S_\nu + \frac{۱}{c^۲}\left(\frac{g}{۲}-۱\right)u^\mu\left(S_\lambda F^{\lambda\nu}u_\nu\right)\right]. \qquad (۴۰.۲)$$

با فرض ِ $g = ۲$ معادله‌ی ِ بالا به شکل ِ زیر ساده می‌شود،

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = \frac{ge}{۲mc}F^{\mu\nu}S_\nu, \qquad (۴۱.۲)$$

و یا

$$\begin{aligned} \frac{dS^\circ}{d\tau} &= \frac{ge}{۲mc}\vec{E}.\vec{S}, \\ \frac{d\vec{S}}{d\tau} &= \frac{ge}{۲mc}\left(S^\circ\vec{E} - \vec{B}\times\vec{S}\right). \end{aligned} \qquad (۴۲.۲)$$

هم‌چنین از معادلات ِ (۳۲.۲) و (۳۳.۲) می‌شود دید که

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{s} + \frac{۱}{۲}(\vec{v}.\vec{s})\vec{v} + \mathcal{O}(v^۳), \\ S^\circ &= \vec{v}.\vec{s} + \mathcal{O}(v^۳). \end{aligned} \qquad (۴۳.۲)$$

تمرین ۲–۱۵: با استفاده از معادله‌ی ِ حرکت ِ (۱۴.۲) و معادلات ِ بالا نشان دهید که

$$\frac{d\vec{s}}{d\tau} = \vec{\mu}\times\left(\vec{B} - \frac{۱}{۲}\vec{v}\times\vec{E}\right) + \mathcal{O}(v^۳). \qquad (۴۴.۲)$$

به این ترتیب با فرض ِ $g = ۲$ هر دو اثر ِ نابهنجار ِ زیمن و برهم‌کنش ِ اسپین–مدار به درستی به دست می‌آیند.