بازبهنجارش ِ هولوگرافیک و دوگانی ِ AdS_3/CFT_2

فرهنگ لران

دانش‌کده‌ی فیزیک، دانش‌گاه صنعتی اصفهان.

چکیده:

دوگانی ِ AdS_3/CFT_2، فیزیک ِ سه بعدی در پس‌زمینه‌ای که به طور مجانبی یک فضازمان ِ پاد–دوسیته (AdS) است را دوگان یک نظریه‌ی میدان هم‌دیس ِ دوبعدی (CFT_2) می‌داند. در این درس، برقراری این دوگانی را با مطالعه‌ی «ناوردایی ِ آجری» (invariance modular) تابع ِ پارش ِ نظریه‌ی میدان هم‌دیس، و «بازبهنجارش ِ هولوگرافیک» کنش ِ نظریه‌ی نسبیت عام اینشتین، بررسی می‌کنیم.

توضیح:

این درس‌نامه بر اساس درس‌گفتارهای ارائه شده در گروه فیزیک نظری دانشگاه دولتی ایروان در تابستان ۹۲ و هم‌چنین در «کارگاه و سمینار پیش‌رفت‌های اخیر در فیزیک نظری» در تابستان ۹۳ است. از مخاطبین درس که با نظرات و پرسش‌های‌شان به به‌تر شدن درک من از موضوع و دقیق‌تر شدن متن درس‌گفتار کمک کردند صمیمانه سپاس‌گزارم. هم‌چنین از خانم فاطمه کاویانی برای ویرایش متن درس‌نامه متشکرم. مسوولیت نادرستی و نارسایی متن پیش رو بر عهده‌ی من است و امیدوارم مخاطبان ِآن، من را هم از نظرات و پرسش‌های شان بهره‌مند سازند. در متن درس‌نامه، مراجع مناسب برای هر بخش از درس را آورده‌ام. برای آموختن نظریه‌ی میدان هم‌دیس در ابعاد گوناگون پیش‌نهاد می‌کنم درس‌نامه‌ی [ShJ] را مطالعه کنید.

جلسه‌ی نخست

در این جلسه چند تعریف مقدماتی را با هدف تبیین نگاشت هم‌دیس و نظریه‌ی میدان هم‌دیس دو–بعدی ارائه می‌کنم. این درس شامل دو بخش است.

- بخش نخست

در این بخش خمینه‌های ریمانی و ساختار مشتق‌پذیری و ساختار هم‌دیس روی آن‌ها را تعریف می‌کنیم. این تعاریف برگرفته از مرجع [Nak] هستند.

فضای توپولوژیک: مجموعه‌ی X و گردآورد $T = \{U_i | i \in I\}$ از زیرمجموعه‌های آن را در نظر بگیرید. فرض کنید،

۱. $\emptyset$ و X عضو T باشند،
۲. اجتماع هر تعداد (حتی تعداد نامتناهی) از اعضای T، عضو T باشد.
۳. اشتراک هر تعداد متناهی از اعضای T، عضو T باشد.

به این ترتیب T به مجموعه‌ی X توپولوژی می‌بخشد. X یک فضای توپولوژیک است و U_iها «زیرمجموعه‌های باز X» نامیده می‌شوند.

M یک خمینه‌ی m بعدیِ مشتق‌پذیر است اگر

۱. M یک فضای توپولوژیک باشد.
۲. به M یک خانواده از زوج‌های $\{(U_i, f_i)\}$ نسبت داده شود.
۳. U_iها M را بپوشانند. یعنی اجتماع همه‌ی آن‌ها برابر با M باشد.
۴. f_i یک همان‌ریختی (homeomorphism) از U_i به یک زیرمجموعه‌ی باز در فضای m بعدیِ تختِ اقلیدسی $\mathbb{R}^m$ باشد.

یادآوری: همان‌ریختی، یک نگاشت پیوسته و وارون‌پذیر است به طوری‌که نگاشتِ وارونش هم پیوسته باشد.

۵. اگر U_i و U_j هم‌پوشانی داشته باشند، آن‌گاه $g_{ij} = f_i f_j^{-1}$ یک نگاشتِ بی‌شمار–مشتق‌پذیر C^∞ باشد.

به زوج (U_i, f_i) نقشه (chart) و به خانواده‌ی $\{(U_i, f_i)\}$ یک جهان‌نما (atlas) می‌گوییم. اگر اجتماع دو جهان‌نما، جهان‌نما باشد آن‌ها را سازگار (compatible) می‌دانیم. سازگاری جهان‌نماها یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و هر کلاس هم‌ارزی از جهان‌نماها را یک «ساختار مشتق‌پذیری» (differentiable structure) تعریف می‌کنیم.

به Ui هم‌سایه‌گیِ مختصاتی (coordinate neighbourhood) و به f_i تابع مختصات می‌گویند: $f_i = \{x^1(p), \dots, x^m(p)\}$ که $x^\mu(p)$ مختصات نقطه‌ی $p \in U_i$ هستند. اگر $p \in U_i \cap U_j$ آن‌گاه می‌شود به p دو مختصه‌ی f_i و f_j را نسبت داد. در این‌صورت، تبدیل مختصات با نگاشت $g_{ij} = f_i f_j^{-1}$ و وارون آن داده می‌شود. گروه چنین تبدیلاتی را با Diff(M) نشان می‌دهیم. این تبدیلات را بازپارامتربندی (reparameterization) می‌نامیم که به معنای تبدیل منفعل (passive) مختصات است.

یک وابرریختی (diffeomorphism) نگاشتی بین دوخمینه‌ی مشتق‌پذیر $h: M \to N$ است به طوری که $y = h(x)$ و $x = h^{-1}(y)$ هر دو C^∞ باشند. منظور از x و y در این‌جا مختصات نقاط $p \in M$ و $h(p) \in N$ است. اگر f و g، به ترتیب، توابع مختصات در هم‌سایه‌گی p و $h(p)$ باشند آن‌گاه $y = h(x)$ به معنـــای $y = ghf^{-1}(x)$ است. در این صورت می گوییم M به N وابرریخت است $M \equiv N$. مجموعه‌ی وابرریختی‌های $h: M \to M$ گروه Diff(M) را می‌سازند و به معنای تبدیل فعال (active) مختصات هستند.

یک خمینه‌ی مشتق‌پذیر M مجهز به یک متریکِ ریمانی g، یک خمینه‌ی ریمانی نامیده می‌شود و با (M, g) نشان داده می‌شود. متریک ریمانی یک میدان تانسوری متقارن است که در هر نقطه‌ی p، ضرب داخلی بردارهای مماس بر خمینه در نقطه‌ی p را می‌دهد، به طوری‌که مربع طول هر بردار ناصفری در p یک عدد مثبت باشد. یادآوری می‌کنم که مربع طول یک بردار از ضرب داخلی آن بردار در خودش به دست می‌آید.

متریک القایی از خمینه‌ی ریمانی (N, g^N) روی خمینه‌ی M تحت وابرریختی $h: M \to N$ با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$g^M{}_{\alpha\beta}(x) = g^N{}_{\mu\nu}\big(h(x)\big)\left(\frac{\partial h(x)^\mu}{\partial x^\alpha}\right)\left(\frac{\partial h(x)^\nu}{\partial x^\beta}\right)$$

که به معنای آن است که اندازه‌ی المان طول، تحت تبدیلات (فعال) مختصات عوض نمی‌شود. این رابطه را به این صورت هم نمایش می‌دهند،

$$g^M = h^* g^N$$

وابرریختی $h\colon M \to M$ یک هم‌متری (isometry) است اگر $h^* g_{h(p)} = g_p$؛ یعنی

$$g_{\mu\nu}\big(h(x)\big)\left(\frac{\partial h(x)^\mu}{\partial x^\alpha}\right)\left(\frac{\partial h(x)^\nu}{\partial x^\beta}\right) = g_{\alpha\beta}(x)$$

وابرریختی $h\colon M \to M$ یک تبدیل هم‌دیس (conformal transformation) است اگر $h^* g_{h(p)} = e^{2\sigma(p)} g_p$ که σ یک تابع هموار است. یادآوری می‌کنم که $\sigma\colon M \to \mathbb{R}$ یک نگاشت هموار است اگر روی نقشه‌ی (U,f) تابع σf^{-1} هموار (C^∞) باشد. مجموعه‌ی تبدیلات هم‌دیس گروه Conf(M) را می‌سازند.

بازمقیاس‌بندی وایل (Weyl rescaling) با اعضای گروه Weyl(M) داده می‌شوند که متریک g_p را به متریک $g'_p = e^{2\sigma(p)} g_p$ تبدیل می‌کنند. گروه وایل به هر متریک، یک کلاس هم‌ارزی از متریک‌ها را نسبت می‌دهد که ساختار هم‌دیس (conformal structure) نام دارد.

اگر نظیر هر نقطه‌ی p از یک خمینه، یک نقشه‌ی (U,f) شامل p وجود داشته باشد به طوری که متریک در آن نقطه با یک تبدیل وایل به متریک فضای تخت اقلیدسی تبدیل شود، آن خمینه را هم‌دیس–تخت (conformally flat) می‌نامیم. هر خمینه‌ی دو بعدی به طوری هم‌دیس تخت است چرا که همیشه یک تبدیل مختصات (منفعل) وجود دارد که متریک را به صورت قطری درآورد. چنین مختصاتی را مختصات هم‌دمایی (isothermal coordinates) می‌نامند.

- بخش دوم

در این بخش، نظریه‌ی میدان هم‌دیس دو–بعدی را معرفی می‌کنم. محتوای این بخش برگرفته از مرجع [Gin] است.

برای توصیف تبدیلات هم‌دیس در دو–بعد، متریک فضای دوبعدی تخت را به صورت زیر می‌نویسیم،

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dzdz^*$$

که $z = x + iy$ و z^* مزدوج مختلط آن است. به ساده‌گی می‌شود دید که در مختصات (z, z^*) تبدیلات هم‌دیس با نگاشت‌های تحلیلی

$$z \to z' = f(z)$$

داده می‌شود. برای روشن شدن موضوع $f^* g_{h(z)}$ را حساب می‌کنیم. تابع $\mathrm{f}(z)$ را به صورت یک وابرریختی $f: M \to N$ در نظر بگیرید که در آن M و N هر دو نظیر صفحه‌ی اعداد مختلط $\mathbb{C}$ هستند. می‌دانیم که متریک روی N همان متریک فضای تخت اقلیدسی است که آن را با $g_{h(z)} = \boldsymbol{\delta}$ نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم متریک القایی روی M را حساب کنیم که آن را با $g'(z) = f^* \boldsymbol{\delta}$. از تعریف متریک القایی که در بخش نخست این درس ارائه کردیم معلوم می‌شود که $g'(z) = |\partial f|^2 \boldsymbol{\delta}$ که نماد ∂ به معنای مشتق از z است

$$\partial = \partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$$

چون $g(z) = \boldsymbol{\delta}$، پس $g'(z) = |\partial f|^2 g(z)$. یعنی وابرریختی ای که با یک تابع تحلیلی داده شود یک تبدیل هم‌دیس است. عکس این گزاره هم درست است.

تمرین: نشان دهید که در دو–بعد هر تبدیل هم‌دیس نظیر یک تابع تحلیلی است.

از آن‌جا که هر تابع تحلیلی $f(z)$ را می‌شود به کمک بسط لوران به صــورت $f(z) = \sum f_n z^{n+1}$ نوشت، عمل‌گر نظیر تبدیل $z \to f(z)$ عبارت است از $\mathcal{L}_f = -\sum f_n \ell_{\mathrm{n}}$ که $\ell_n = -z^{n+1}\partial$؛ یعنی $\mathcal{L}_f z = f(z)$. می‌شود دید که عمل‌گرهای l_n نمایشی از جبر «ویت» هستند،

$$[l_m, l_n] = (m - n) l_{n+m}$$

تبدیلات هم‌دیس سراسری با آن دسته از عمل‌گرهای l_n داده می‌شوند که در سرتاسر کره‌ی ریمانی (صفحه‌ی مختلط به علاوه‌ی ∞) خوش‌رفتار باشند. برای آن‌که $\mathcal{L}_f$ در مبدا $(z = 0)$ خوش‌رفتار باشد باید f_n برای $n < -1$ صفر باشد. هم‌چنین، برای خوش‌رفتاری در ∞ باید f_n برای $n > 1$

هم صفر باشد. برای تایید این گزاره توجه کنید که نقطه‌ی ∞ در مختصات z نظیر نقطه‌ی مبدا $(w=0)$ در مختصات $w=z^{-1}$ است و

$$l_n=-z^{n+1}\partial=w^{-n+1}\partial_w$$

پس عمل‌گرهای مولد تبدیلات هم‌دیس سراسری عبارت اند از $\ell_{-1},\ \ell_0,\ \ell_1$. گروه تبدیلات هم‌دیس سرتاسری

$$SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2\approx SO(3,1)$$

است و با رابطه‌ی زیر داده می‌شود،

$$z\to z'=\frac{(az+b)}{(cz+d)}$$

که در آن a,b,c,d اعداد مختلطی هستند که در رابطه‌ی $ad-bc=1$ صدق می‌کنند. عملِ $\mathbb{Z}_2$ هم نظیر تبدیل

$$(a,b,c,d)\to-(a,b,c,d)$$

است که تاثیری در نگاشت $z\to z'$ ندارد.

تمرین: نشان دهید که در صفحه‌ی (x,y)، عمل‌گر $S=-i(\ell_0-{\ell^*}_0)$ نظیر دوران است.

در یک نظریه‌ی میدان (با تقارن) هم‌دیس (conformal field theory)، میدان‌های اولیه (primary fields) «به وزن h» میدان‌هایی هستند که تحت تبدیل وابرریختی $f(z)$ همچون h–فرم‌ها (h-form) نگاشته شوند. این میدان‌ها را با $\boldsymbol{\Phi}_h$ نمایش می‌دهیم. یک h–فرم تعمیمی از تک–فرم است و با $\boldsymbol{\Phi}_h=\varphi_{h(z)}dz^h$ نمایش داده می‌شود:

$$f^*\boldsymbol{\Phi}_h={\varphi'}_h(z)dz^h=\varphi\big(f(z)\big)\big(df(z)\big)^h$$

این رابطه را می‌شود به این صورت هم نمایش داد

$$\varphi_h(z)\to{\varphi'}_h(z)=(\partial f)^h\varphi_h\big(f(z)\big)$$

تمرین: نشان دهید که تغییر یک میدان اولیه به وزن h تحت یک تبدیل بی‌اندازه کوچک $f(z) = z + \varepsilon F(z) + O(\varepsilon^2)$ با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\delta\varphi_h(z) = \varphi'_h(z) - \varphi_h(z) = \varepsilon(F(z)\partial\varphi_h + h\varphi_h\partial F) + O(\varepsilon^2)$$

فرض بر این است که تبدیل وابرریختی $f(z)$ نظیر یک عمل‌گر یکانی U_f باشد به طوری که $\varphi'_h = U^\dagger\varphi_h U$. جلسه‌ی آینده خواهیم دید که حالت خلا نظریه‌ی میدان هم‌دیس تحت تبدیلات سرتاسری ناوردا است. پس تحت تبدیلات سرتاسری، تابع دو–نقطه‌ایِ میدان‌های اولیه در اتحاد زیر صدق می‌کند:

$$G_{hh'}(z,w) = \langle\varphi'_h(z)\varphi'_{h'}(w)\rangle = \langle\varphi_h(z)\varphi_{h'}(w)\rangle$$

تبدیل انتقال $F(z) = 1$ نشان می‌دهد که $G_{hh'}(z,w) = G_{hh'}(z-w)$. تبدیل بازمقیاس‌بندی $F(z) = z$ نشان می‌دهد که

$$G_{hh'}(z-w) = \frac{c_{hh'}}{(z-w)^{h+h'}}$$

و «تبدیل ویژه‌ی هم‌دیس» $F(z) = z^2$ نشان می‌دهد که اگر $h \neq h'$ آن گاه $c_{hh'} = 0$. قرارداد عمومی برای بهنجارش میدان‌های اولیه مبنی بر $c_{hh} = 1$ است.

جلسه‌ی دوم

در بخش نخست تانسور تکانه–انرژی را به عنوان مولد تبدیل هم‌دیس معرفی می‌کنیم و «اتحاد وارد» را به دست می‌آوریم. در بخش دوم ناوردایی ِ آجری ِ تابع پارش را معرفی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که اگر انرژی اولین برانگیخته‌گی متناهی باشد آن‌گاه، به واسطه‌ی ناوردایی ِ آجری، حد ِدمای ِ زیاد ِ تابع پارش به طور یکتا بر حسب «بارِ مرکزی» تعیین می‌شود. با استفاده از این نتیجه، آنتروپی «کاردی» را حساب می‌کنیم.

- بخش نخست

در این بخش اتحاد وارد نظیر تقارن هم‌دیس را به دست می‌آوریم. این اتحاد را به صورت «بسطِ ضربِ عمل‌گری» (operator product expansion) می‌نویسیم و جبر ویراسورو که نسخه‌ی کوانتمی جبر ویت است را به دست می‌آوریم. این بخش از درس تا حدودی برگرفته از [Gin] و [Pol] است. جهت مقایسه‌ی مطالب این درس‌نامه با تعاریف و روابط کتابی چون [Pol] توجه شما را به این نکته جلب می‌کنم که یک تبدیل فعال نظیر نگاشت f با یک تبدیل منفعل نظیر نگاشت f^{-1} هم‌ارز است.

در جلسه‌ی گذشته عمل‌گرهای مولد تبدیل هم‌دیس را شناختیم. ولی هنوز بارهای نودری (Noether charges) نظیر این عمل‌گرها در یک نظریه‌ی میدان (با تقارن) هم‌دیس را تعیین نکرده‌ایم. یادآوری می‌کنم که پس از کوانتش، بارهای نودری، عمل‌گرهای مولد تبدیل هم‌دیسِ میدان‌های اولیه را به دست می‌دهند. در جلسه‌ی قبل تبدیل هم‌دیس را براساس وردش متریک معرفی کردیم. معیار وردش کنشِ یک نظریه بر حسب وردشِ متریک، تانسور تکانه–انرژی است:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{g^{1/2}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \,, \qquad \mu,\nu = 1, \ldots, d$$

به عبارت دیگر

$$\delta S = \frac{1}{4\pi} \int d^d\, z g^{1/2} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

این تعریف، یک ضریب (-2π) با آن‌چه که در نظریه‌ی میدان کوانتمی متعارف است تفاوت دارد. هم‌چنین تعریف تانسور تکانه–انرژی در فضای ریمانی (مثل فضای تخت اقلیدسی) با آن‌چه که در فضازمان لورنتسی (مثل فضازمان مینکوفسکی) نوشته می‌شود یک علامت منها تفاوت دارد. این قراردادها در فصل‌های اول و سوم [Pol] آمده است.

تحت یک وابرریختی (تبدیل فعال مختصات) $x^\mu \to x^\mu + \varepsilon X^\mu(x)$

$$\delta g_{\mu\nu} = \varepsilon\left(\nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu\right)$$

در این رابطه ∇ نماد مشتق هم‌وردا (تحت وابرریختی) است. با فرض این‌که میدان X تنها در ناحیه‌ی محدودی ناصفر است، با استفاده از فن انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌شود دید که تحت این وابرریختی

$$\delta S = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int d^d\, z g^{1/2} X^\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu}$$

در نتیجه تقارن وابرریختی، به معنای «ناوردایی کنش، تحتِ وابرریختی دلخواه» به معنای آن است که $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ که در فضازمان تخت، به قانون بقای چارتکانه منجر می‌شود:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

ناوردایی ِ کنش تحت تبدیل وایل $\delta g_{\mu\nu} = \sigma(x)\, g_{\mu\nu}$ نشان می‌دهد که تریس تانسور تکانه–انرژی صفر است: $T^\mu{}_\mu = 0$.

در دو–بعد و در مختصات (z, z^*) شرط تریس، نشان می‌دهد که $T_{zz^*} = 0$، با استفاده از این نتیجه از قانون بقای چارتکانه معلوم می‌شود که $\partial T_{zz^*} = 0$. به همین ترتیب معلوم می‌شود که T_{zz} یک تابع تحلیلی است یعنی فقط تابع مختصه‌ی z است. در فرمول‌نویسی نظریه‌ی میدان هم‌دیس دو–بعدی مرسوم است که به جای یک مختصه‌ی z و مزدوج مختلط آن z^*، نظریه را روی فضای $\mathbb{C}^2$ با مختصات مستقل z و $\bar{\mathrm{z}}$ فرمول‌بندی کنند. پس از پایان همه‌ی محاسبات، مقدار مشاهده‌پذیرها روی زیرفضای $\bar{\mathrm{z}} = \mathrm{z}^*$ از $\mathbb{C}^2$ تعیین می‌شوند. بر این اساس ادعا می‌شود که یک نظریه میدان هم‌دیس دو–بعدی روی $\mathbb{C}^2$ و با دو مولد $T(z)$ و $\hat{T}(\bar{z})$ داده می‌شوند.

- اتحاد وارد.

توابع چند نقطه‌ای در نظریه‌ی میدان هم‌دیس دو بعدی با انتگرال–مسیر زیر داده می‌شوند،

$$\langle \mathcal{R}\, \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n) \rangle = \int D\varphi\, \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)\, e^{-S[\varphi, g]}$$

این رابطه در درس نظریه‌ی میدان کوانتمی به دست می‌آید. آن‌چه که در این رابطه با فرمول متعارف کتاب‌های نظریه‌ی میدان کوانتمی تفاوت دارد این است که در سمت راست تساوی، به جای e^{iS} نوشته‌ام e^{-S} و در سمت چپ هم به جای علامت «ترتیب زمانی» گذاشته‌ام $\mathcal{R}$ که نماد ترتیب شعاعی است. شعاع در این‌جا همان فاصله از مبدا است که با $|z| = (zz^*)^{1/2}$ داده می‌شود. اولین تغییر به این دلیل است که نظریه در این‌جا روی یک خمینه‌ی اقلیدسی دو–بعدی تعریف شده است در حالی‌که در نظریه‌ی میدان‌های کوانتمی، نظریه روی یک فضازمان (غالبا مینکوفسکی) تعریف می‌شود. دلیل دومین تغییر را در بخش دوم این جلسه توضیح می‌دهم. منظور از نماد $\hat{\varphi}(x)$ در سمت چپ این تساوی

هم این است که در نقطه‌ی x یک عمل‌گر نظیر میدان کلاسیک $\varphi(x)$ گذاشته‌ایم. با نوشتن کنش به صورت $S[\varphi, g]$ هم بسته‌گی کنش به میدان φ و متریک g را به صراحت نشان داده‌ام.

فرض کنید که کنش کلاسیک، تحت وابرریختی $x' = f(x)$ متقارن باشد:

$$S[\varphi, g] = S[\varphi', g']$$

که در آن $\varphi' = f^*\varphi$ و $g' = f^*g$.

برای ساده‌گی بحث فرض کنید که می‌خواهیم یک تابع تک–نقطه‌ای را محاسبه کنیم.

$$\langle\hat{\varphi}(x)\rangle = \int \mathcal{D}\varphi\ \varphi(x)\ e^{-S[\varphi,g]} = \int \mathcal{D}\varphi'\ \varphi'(x)\ e^{-S[\varphi\prime,g]}$$

در تساوی دوم صرفا متغیر انتگرال‌گیری را در انتگرال مسیر عوض کرده‌ایم. تقارن کلاسیک کنش به این معنا خواهد بود که

$$S[\varphi', g] = S[\varphi, f^{-1*}g]$$

به طور کلی $\mathcal{D}\varphi' = \mathcal{D}\varphi\, J_f$ که J_f ژاکوبی ِ تبدیل ِ معیار (measure) انتگرال‌گیری است. فرض کنید برای وابرریختی مورد نظر ما $J_f = 1$. حالت کلی‌تر در کتاب [Pol] بحث شده است و من هم کمی جلوتر چند کلمه توضیح می‌دهم. با فرض این که $J_f = 1$ نتیجه می‌گیریم که

$$\langle\hat{\varphi}(x)\rangle = \int \mathcal{D}\varphi\ \varphi'(x)\ exp(-S[\varphi, f^{-1*}g])$$

برای یک تبدیل مختصات (فعال) بی‌اندازه کوچک $f^\mu = x^\mu + \varepsilon\, X^\mu$ سمت راست رابطه‌ی بالا به این صورت در می‌آید

$$\int D\varphi\ \varphi(x)\ e^{-S[\varphi,g]} + \int D\varphi\ \delta\varphi(x)\ e^{-S[\varphi,g]} + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int D\varphi\ \varphi(x) \int d^2y\ g^{1/2}\ \nabla_\mu X_\nu(y)\ T_{\mu\nu}(y)\ e^{-S[\varphi,g]}$$

$$= \langle\hat{\varphi}(x)\rangle + \langle\delta\tilde{\varphi}(x)\rangle + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int d^2y\ g^{\ 1/2}\ \langle\mathcal{R}j^\mu(y)\hat{\varphi}(x)\rangle$$

که در آن $j^\mu = X_\nu T^{\mu\nu}$. در به دست آوردن این نتیجه، توجه کردیم که «دیورژانس» تانسور تکانه–انرژی صفر است. پس از تقارن کلاسیک نتیجه می‌شود که

$$\langle \delta \hat{\varphi}(x) \rangle \;=\; -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int d^2y\, g^{\,1/2} \langle \mathcal{R}\, \nabla_\mu\, j^\mu(y) \hat{\varphi}(x) \rangle$$

این رابطه را اتحاد وارد می‌نامیم. توجه کنید که جریان نودری برحسب مولد X^μ و تانسور تکانه–انرژی کلاسیک به دست آمد. اگر ژاکوبی J_f بدیهی نبود آن‌گاه سهم وردش «معیار انتگرال مسیر» به این جریان اضافه می‌شد.

پس در یک نظریه میدان هم‌دیس در فضای تخت، تابع تک–نقطه‌ای برای میدان اولیه با وزن h تحت تبدیل هم‌دیس $z \to z + \varepsilon\, v(z)$ در اتحاد زیر صدق می‌کند

$$\langle \delta \widehat{\varphi}_\mathrm{h}(\mathrm{w}) \rangle = \; -\frac{\varepsilon}{4\pi} \int \mathrm{d}^2\mathrm{z}\, \langle \mathcal{R}\, \widehat{\varphi}_h(\mathrm{w})\;\; \partial_\mu \mathrm{j}^\mu(\mathrm{z}) \rangle$$

برای محاسبه‌ی ضرایب توجه کنید که $g_{\mathrm{z}\bar{\mathrm{z}}} = 1/2$. برای محاسبه‌ی این انتگرال از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم

$$\int d^2z (\partial_z v^z + \partial_{\bar{z}} v^{\bar{z}}) = i \oint (v^z\, d\bar{z} - v^{\bar{z}}\, dz)$$

که جهت پربند انتگرال‌گیری روی مرز یک ناحیه‌ی هم‌بند ساده، پادساعت‌گرد است. ولی باید توجه کنیم که به خاطر نماد $\mathcal{R}$ در انتگرال‌ده، انتگرال روی سطح، عملا به دو ناحیه تقسیم شده است: نواحی داخل دایره‌ای به شعاع $|w|$ و نواحی خارج از آن. ناحیه‌ی خارجی دو مرز دارد؛ یکی در بی‌نهایت و یکی در مرز با ناحیه‌ی داخلی؛ پربند انتگرال‌گیری روی مرز ِ داخلی ساعت‌گرد است. فرض ما بر این است که $v(z)$ تنها در ناحیه‌ی محدودی از فضا ناصفر است (یادآوری می‌کنم که فقط زیرگروه $SL(2,\mathbb{C})$ از گروه تبدیلات هم‌دیس به طور سرتاسری خوش‌تعریف است)؛ پس انتگرال مرزی در بی‌نهایت صفر است. مجموع دو انتگرال مرزی باقی مانده عملا یک انتگرال ساعت‌گرد حول w است. پس

$$\langle \delta \hat{\varphi}_h(w) \rangle = i\, \frac{\varepsilon}{4\pi} \oint \langle \mathcal{R}\, \hat{\varphi}_h(w)\; (j^{\,z} d\bar{z} - j^{\,\bar{z}} dz) \rangle$$

که این پربند پادساعت‌گرد و حول w است. با جای‌گذاری معلوم می‌شود که

$$j^z = 2v^{\bar{z}}\, T(\bar{z}), \qquad\qquad j^{\bar{z}} = 2v^z\, T(z)$$

پس

$$\langle \delta\hat{\varphi}_h(w)\rangle = \frac{\varepsilon}{2\pi i}\oint dz\, v^z \,\langle R\hat{T}(z)\,\hat{\varphi}_h(w)\rangle \\ -\frac{\varepsilon}{2\pi i}\oint d\bar{z}\, v^{\bar{z}}\langle R\,\hat{T}\,(\bar{z})\hat{\varphi}_h(w)\rangle$$

با مقایسه‌ی این نتیجه با آن‌چه که در تعریف میدان اولیه گفتیم یعنی

$$\delta\varphi_h(z) = \varepsilon\,(v^z\,\partial\varphi_h + h\,\varphi_h\,\partial v^z)$$

معلوم می‌شود که

$$\mathcal{R}\hat{T}(\bar{z})\,\hat{\varphi}_h(w) = 0$$

$$\mathcal{R}\,\hat{T}(z)\,\hat{\varphi}_h(w) = \frac{h}{(z-w)^2}\,\hat{\varphi}_h(w) + \frac{1}{(z-w)}\,\partial\hat{\varphi}_h(w) + \cdots$$

به چنین روابطی، بسط ضرب عمل‌گری می‌گویند. غالبا نماد $\mathcal{R}$ را نمی‌نویسند هرچند مفروض است. نماد «...» هم نشان‌دهنده‌ی جملاتی هستند که در $z = w$ خوش‌رفتار هستند. با استفاده از این نتیجه که $\hat{T}(\bar{z})\,\hat{\varphi}_h(w) = 0$ از این به بعد ما بحث‌مان را به «محور» $\mathbb{C}$ با مختصه‌ی z محدود می‌کنیم.

در پایان خوب است به نکته‌ای توجه کنیم. دیدیم که انتگرال ِ z، روی پربند پادساعت‌گردی حول w عملا تفاضل انتگرال روی پربند پادساعتگرد در شعـاع $|z| > |w|$ (که با $\oint dz^+$ نشان خواهم داد) و انتگرال روی پربند پادساعتگرد در شعاع $|z| < |w|$ است (که با $\oint\, dz^-$ نمایش می‌دهم). در حد $|z| \to |w|$

$$\oint dz\, v^{\ z}\langle\mathcal{R}\hat{T}(z)\,\hat{\varphi}_h\,(w)\rangle \\ = \oint dz^{\,+}\, v^z\ \langle\hat{T}(z)\,\hat{\varphi}_h(w)\rangle - \oint dz^-\, v^z\,\langle\hat{T}(z)\,\hat{\varphi}_h(w)\rangle \\ = \oint dz\, v^z\langle[\hat{T}(z), \hat{\varphi}_h(w)]\rangle_{|z|=|w|}$$

پس معلوم می‌شود که

$$\langle \delta \hat{\varphi}_h(w) \rangle = \frac{\varepsilon}{2\pi i} \oint dz\, v^{\,z} \langle [\hat{T}(z), \hat{\varphi}_h(w)] \rangle - \frac{\varepsilon}{2\pi i} \oint d\bar{z}\, v^{\bar{z}} \langle [\hat{T}(\bar{z}), \hat{\varphi}_h(w)] \rangle$$

که جابه‌جاگرها بین دو عمل‌گر «هم–شعاع» یعنی در $|z| = |w|$ تعریف شده‌اند. در بخش بعدی خواهیم دید که در این فرمول‌بندی، «شعاع» نقش «زمان» در نظریه‌ی میدان متعارف را دارد. به این ترتیب اتحاد وارد همان حکم آشنایی است که می‌گوید در نظریه‌ی کوانتمی، «بار نودری» مولد وردش‌های نظیر یک تقارن کلاسیک است.

- جبر ویراسورو

از آن‌جا که در نظریه‌ی کلاسیک، تانسور تکانه–انرژی یک تانسور رتبه‌ی دو است، انتظار داریم که تانسور تکانه–انرژی یک میدان اولیه با وزن $h = 2$ باشد. برای تحقیق این مطلب باید بسط ضرب عمل‌گری $\mathcal{R}\hat{T}(z)\hat{T}(w)$ را حساب کنیم. خواهیم دید که

$$\hat{T}(z)\hat{T}(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}\,\hat{T}(w) + \frac{1}{(z-w)}\partial\hat{T}(w) + \cdots$$

کمیت c در جمله‌ی اول را بار مرکزی می نامند. بارهای نودری نظیر مولدهای تبدیل هم‌دیس l_n به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz\, z^{n+1}\;\; T(z)$$

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \left(\frac{c}{12}\right)(n^3 - n)\delta_{n+m,0}$$

به این جبر، جبر ویراسورو می‌گویند.

برای تعریف حالت خلاء در خواست می‌کنیم که $T(z)|0\rangle$ در $z = 0$ خوش‌رفتار باشد یعنی برای $m \geq -1$، $L_m|0\rangle = 0$. علت این درخواست این است که $z = 0$ نظیر $t \to -\infty$ است؛ یعنی فرض می‌کنیم وردشِ هم‌دیسِ حالت خلاءِ آغازین دست‌گاه، خوش‌تعریف باشد. برآورده شدن این

درخواست دو نتیجه‌ی مهم دارد: نخست این‌که حالت خلاء تحت تقارن سرتاسری $SL(2,\mathbb{C})$ ناوردا است. دوم این‌که چون $L^{\dagger}{}_{n} = L_{-n}$، و در نتیجه چشم‌داشتی $\langle T \rangle$ در حالت خلاء صفر است، پس

$$\langle \hat{T}(z)\hat{T}(w) \rangle = \frac{{}^{c}/_{2}}{(z-w)^4}$$

این نتیجه از این جهت مهم است که راهی برای محاسبه‌ی بار مرکزی c پیش پای ما می‌گذارد. روش دیگر محاسبه‌ی بار مرکزی، استفاده از نابهنجاری وایل (Weyl anomaly) است که در [Pol] آمده است. برای مطالعه‌ی درس کوتاهی در این‌باره و هم‌چنین نابهنجاری گرانشی می‌توانید به [GrA] مراجعه کنید. روش سومی هم برای محاسبه‌ی c هست که در بخش بعدی مطالعه می‌کنیم.

- بخش دوم

نظریه‌ی میدان هم‌دیس روی چنبره

آن‌چه تا این‌جا گفتیم درباره‌ی نظریه میدان روی کره‌ی ریمانی بود. با استفاده از این فرمول‌بندی علی‌الاصول می‌شود نظریه‌ی میدان هم‌دیس روی همه‌ی سطوح بسته‌ی ریمانی را مطالعه کرد. ما در این بخش از درس، نظریه‌ی میدان هم‌دیس روی یک چنبره را مطالعه می‌کنیم.

یک فضازمان $1+1$ بعدی را در نظر بگیرید که محور فضا یک دایره باشد. ممکن است بخواهیم که این فضا زمان را یک استوانه‌ی لورنتسی بنامیم. فرض کنید که با یک دوران و یک (Wick rotation) این استوانه‌ی لورنتسی را به یک استوانه‌ی اقلیدسی تبدیل کنیم. یک دلیل خوب برای این کار، تعریف تابع پارش به روش انتگرال–مسیر است که در کتاب‌های درسی آمده است.

روی استوانه‌ی اقلیدسی، جهت «زمان اقلیدسی» را با $s_0 \in \mathbb{R}$ و جهت فضایی را با $s_1 \in [0,2\pi)$ نمایش می‌دهیم. نگاشتی از استوانه به صفحه‌ی اعداد مختلط $\mathbb{C}$ با $z = exp(w)$ و $w = s_0 + is_1$ را در نظر بگیرید. به وضوح $|z| \to 0$ نظیر $s_0 \to -\infty$ است. هم‌چنین ترتیب زمانی روی استوانه نظیر ترتیب شعاعی روی $\mathbb{C}$ است. رابطه‌ی تانسور تکانه انرژی روی استوانه و چنبره با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$T_{cyl}(w) = z^2\, T(z) - \frac{c}{24}$$

عمل‌گرهای ویراسورو روی چنبره با «تبدیل فوریه» ی T_{cyl} داده می‌شوند

$$T_{cyl}(w) = \sum \mathrm{I}_n \, e^{-nw}$$

از این‌جا معلوم می‌شود که $\mathrm{I}_0 = L_0 - \frac{c}{24}$. در نتیجه وزن حالت خلاء روی استوانه $-\frac{c}{24}$ است:

$$\mathrm{I}_0 |0\rangle = -\frac{c}{24} \, |0\rangle$$

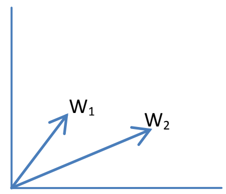
دلیل علاقه‌ی ما به استوانه‌ی اقلیدسی، مطالعه‌ی نظریه‌ی میدان هم‌دیس در دمای متناهی است. از مکانیک آماری می‌دانیم که تابع پارش در آنسامبل کانونیک با

$$Z(\beta) = Tr \exp(-\beta H)$$

به زبان انتگرال–مسیر معنی این رابطه این است که انتگرال–مسیر را برای «زمان اقلیدسی» با دوره‌ی تناوب β محاسبه کنیم. این کار، استوانه را به چنبره تبدیل می‌کند. چنبره‌ای که با این روش به دست می‌آید یک چنبره‌ی قائم (راست) است که از ضرب مستقیم دو دایره‌ی $[0,\beta]$ و $[0,2\pi]$ به دست آمده است. دوره‌ای بودن به معنای آن است که روی محور زمان، نقطه‌ی β همان مبدا است و روی محور فضا هم نقطه‌ی 2π همان مبدا است. به دلایل مشابهی، محاسبه‌ی تابع پارش در آنسامبل گراند–کانونیک هم‌ارز محاسبه‌ی تابع پارش روی یک چنبره‌ی نا–راست است. مطالعه‌ی نظریه میدان هم‌دیس روی چنبره، اطلاعات نابی درباره‌ی طیف نظریه و به ویژه معنای بار مرکزی به ما می‌آموزد.

- ساختار مختلط چنبره و مساله‌ی ناوردایی آجری

ساختار مختلط روی خمینه‌ها همانند ساختار مشتق‌پذیری تعریف می‌شود. تفاوت در این است که هر نقشه با یک نگاشت f از U به یک زیرمجموعه‌ی باز از $\mathbb{C}$ داده می‌شود. هم‌چنین اگر U_j و U_i هم‌پوشانی داشته باشند، آن‌گاه $g_{ij} = f_i f_j^{-1}$ یک نگاشت تحلیلی (holomorphic) باشد. یک چنبره را می‌شود به کمک یک شبکه توصیف کرد. شبکه‌ی $L(w_1, w_2)$ (با فرض $\mathrm{Im}\frac{w_2}{w_1} > 0$) با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:



$$L(w_1, w_2) = \{m\, w_1 + n\, w_2 | m, n \in \mathbb{Z}\}$$

کلاس هم‌ارزی شبکه‌ها با گروه $SL(2,\mathbb{Z})$ داده می‌شود. یعنی دو چنبره $L(w_1,w_2)$ و $L(\widehat{w}_1,\widehat{w}_2)$ هم‌ارز اند اگر و فقط اگر «بردار» $(\widehat{w}_1,\widehat{w}_2)$ با یک «دوران» $SL(2,\mathbb{Z})$ به (w_1,w_2) تبدیل شود. جزئیات این موضوع در [Nak] آمده است.

یک چنبره را می‌شود با $\frac{\mathbb{C}}{L(w_1,w_2)}$ تعریف کرد. اگر ساختار مختلط روی دو چنبره یکسان باشد آن‌گاه می‌شود یک نگاشت تحلیلی (h) بین این دو چنبره نوشت. برای تعیین این نگاشت، برافکنش‌های $\mathrm{p}_1: \mathbb{C} \to \frac{\mathbb{C}}{L(w_1,w_2)}$ و $\mathrm{p}_2: \mathbb{C} \to \frac{\mathbb{C}}{\mathrm{L}(\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2))}$ را در نظر بگیرید. آن‌گاه $\mathrm{H} = \mathrm{p}_2\ \mathrm{h}\ \mathrm{p}_1{}^{-1}$ یک نگاشت تحلیلی از $\mathbb{C}$ به $\mathbb{C}$ است. پس $\mathrm{H(z)} = \mathrm{az} + \mathrm{b}$ که a و b اعداد مختلط هستند. ضریب a به این معناست که اگر دو چنبره فقط از نظر «اندازه» با هم متفاوت باشند، ساختار مختلط یک‌سانی دارند.

$$\begin{pmatrix} \widehat{w}_1 \\ \widehat{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

چون نسبت $\tau = w_2/w_1$ از این ضریب مستقل است می‌گوییم که ساختار مختلط یک چنبره با τ داده می‌شود. با توجه به گروه هم‌ارزی دو شبکه، نتیجه می‌گیریم که ساختار مختلط یک چنبره تحت تبدیلات $\tau \to \tau + 1$ و $\tau \to -1/\tau$ یا هر توالی‌ای از آن‌ها ناوردا است. مجموعه‌ی این تبدیلات را گروه تبدیلات آجری می‌نامند

$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\,, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})/\,\mathbb{Z}_2\,.$$

چون تحت $\tau \to \tau + 1$ یک شبکه عینا به خودش نگاشته می‌شود پس تابع پارش یک نظریه‌ی میدان هم‌دیس روی چنبره به وضوح تحت این تبدیل ناوردا است. $\tau \to -1/\tau$ عملا به این معنا است که شبکه را در صفحه‌ی $\mathbb{C}$ بچرخانیم و بعد اندازه‌ی آن را تغییر بدهیم. چون تابع پارش یک نظریه‌ی میدان هم‌دیس تحت بازمقیاس‌بندی ناوردا است پس تابع پارش تحت $\tau \to -1/\tau$ هم ناوردا ست. بر این اساس می گوییم تابع پارش «نظریه‌ی میدان هم‌دیس روی چنبره» تحت تبدیلات آجری ناوردا ست.

- رابطه‌ی کاردی (Cardy formula)

یک چنبره‌ی قائم را در نظر بگیرید. ساختار مختلط این چنبره بـــــا $\tau = i\beta/2\pi$ داده می‌شود که $\beta = \tau^{-1}$ عکس دما ست. تابع پارش نظریه عبارت است از

$$Z(\beta) = \exp(-\beta E_0) + n_1 \exp(-\beta E_1) + \cdots$$

در این رابطه $E_0 = -\frac{c}{12}$ و n_1 تعداد حالت‌ها (واگنی) در اولین برانگیخته‌گی است. با استفاده از ناوردایی تحت تبدیل $\tau \to -1/\tau$ معلوم می‌شود که در حد دمای زیاد $\beta \to 0$

$$Z(\beta) \simeq \exp\left(\frac{4\pi^2\beta^{-1}c}{12}\right)$$

در نتیجه انرژی آزاد دست‌گاه $F = \ln(Z)$ در حد دمای زیاد با رابـــطه‌ی $F(\beta) = -\frac{\pi^2 c\, T^2}{3}$ داده می‌شود. از ترمودینامیک می‌دانیم که $\mathrm{F} = \mathrm{U} - \mathrm{TS}$ که U انرژی داخلی دست‌گاه و S آنتروپی است. به علاوه از قانون اول ترمودینامیک می‌دانیم که $dU = T\, dS$. از این‌جا و با کمی محاسبه معلوم می‌شود که

$$S = \frac{2\pi^2 c\, T}{3}$$

به این نتیجه که در حد دمای زیاد برقرار است رابطه‌ی کاردی یا آنتروپی کاردی می‌گویند.

جلسه‌ی سوم

در این جلسه خواهیم دید که تقارن‌های مجانبی در یک فضای پاددوسیته با مولدهای جبر ویراسورو داده می‌شوند. این مشاهده می‌تواند به معنای آن باشد که گرانش سه بعدی در پس‌زمینه‌ی پاددوسیته هم ارز یک نظریه‌ی میدان دو-بعدی باشد. دو شاهد برای درستی این ادعا عبارت‌اند از آ) آنتروپی بکنشتاین-هاوکینگ سیاه‌چاله‌ی بی‌تی‌زد (BTZ) با رابطه‌ی کاردی داده می‌شود و ب) تابع دو نقطه‌ای دو عمل‌گر روی مرز فضای پاددوسیته همانند تابع دو نقطه‌ای میدان‌های (شبه) اولیه در نظریه‌ی میدان هم‌دیس است.

متریک فضایی که به طور مجانبی پاددوسیته است، در حد $r \to \infty$ به صورت زیر داده می‌شود

$$ds^2 = r^2\, dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + r^2\, d\varphi^2$$

در نوشتن این متریک شعاع فضای پاددوسیته را برابر با یک گرفته‌ام. اگر این هندسه مربوط به یک سیاه‌چاله‌ی ایستای «بی‌تی‌زد» به جرم M باشد [BTZ] آن‌گاه محور زمان دوره‌ای است که دوره‌ی آن با وارون دمای هاوکینگ داده می‌شود.

$${ds^2}_{BTZ} = (r^2 - 8GM)\, dt^2 + \frac{dr^2}{(r^2 - 8GM)} + r^2\, d\varphi^2$$

درباره‌ی سیاه‌چاله‌ی بی‌تی‌زد، کمی جلوتر بحث خواهیم کرد.

در چنین هندسه‌ای، مرز فضا در $r \to \infty$ یک چنبره با متریک $ds_B^2 = dt^2 + d\varphi^2$ است. این مرز را مرز هم‌دیس می‌نامند و انتظار بر این است که نظریه‌ی میدان واقع بر این مرز یک نظریه میدان هم‌دیس باشد. دلیلش هم این است که اگر با یک تبدیل مختصات متریک مرز در حد یک ضریب (یک تابع متناهی از $t\,,\varphi$) تغییر کند می‌شود آن را در تعریف متغیر r جذب کرد. پس کنش نظریه‌ی مرزی باید تحت چنین تبدیلی ناوردا باشد.

- تقارن مجانبی

تبدیلات مختصاتی (به جز تبدیلات مختصات هم‌متری) را در نظر بگیرید که با معیاری، رفتار مجانبی متریک را تغییر ندهند. این معیار می‌تواند به این صورت باشد:

$$\delta g_{tt} = O(1), \quad \delta g_{\phi\phi} = O(1), \qquad \delta g_{rr} = O(r^{-3}),$$
$$\delta g_{t\phi} = O(1), \quad \delta g_{r\phi} = O(r^{-1}).$$

یادآوری می کنم که

$$\delta g_{\mu\nu} = X^\alpha \partial_\alpha\, g_{\mu\nu} + \partial_\mu X^\alpha\, g_{\alpha\nu} + \partial_\nu X^{\,\alpha} g_{\alpha\mu}$$

از حل این روابط معلوم می‌شود که

$$X(z,\bar{z}) = X(z)\,\partial_z - \frac{1}{2}\,(\partial_z X(z))\,r\,\partial_r + z \leftrightarrow \bar{z}$$

که $z = t - i\varphi$ و $\bar{z} = z^*$ به سادهگی میشود دید که جبر لی این مولدها همریختِ جبر ویت است.

➢ تابع انرژی آزاد

از آنجا که تابع پارش نظریه در حد کلاسیک با مقدار کنش کلاسیک روی لاک حرکت داده میشود، میشود انتظار داشت انرژی آزاد نظریهی میدان همدیس با رابطهی زیر داده شود

$$\beta F = S_{EH}|_{on-shell}$$

که S_{EH} نماد کنش اینشتین هیلبرت با ثابت کیهان شناسی $\Lambda = -2$ است. از آنجا که فضا به طور مجانبی پاد–دوسیته است، پس به طور مجانبی خمش اسکالر به مقدار $R = -6$ میل میکند. در نتیجه مقدار کنش اینشتین–هیلبرت روی لاک حرکت نامتناهی است و باید نظریه را با اضافه کردن چند جملهی مرزی (برای اینکه تاثیری در معادلهی حرکت نگذارند) متناهی کرد. جزئیات این مساله در [Hen] آمده و تعمیم آن به کنشهای $\mathrm{f(Ric)}$ در [Ric] مطالعه شده است و در این جا تکرار نمیکنم. فرض کنید که تانسور تکانه–انرژی روی مرز را بر حسب وردش کنش بهنجار شده نسبت به وردش متریک روی مرز بنویسیم. میشود دید که تریس این «شبه تانسور» به شکل متعارف در اثر نابهنجاری وایل نظیر بار مرکزی $c = 3\ell/2G$ داده میشود. ℓ در اینجا شعاع فضای پاددوسیته است که در این قبلا آن را برابر با یک گرفته بودیم. این مقدار برای «بار مرکزی» به روشهای مختلفی محاسبه و تایید شده است.

➢ آنتروپی بکنشتاین–هاوکینگ سیاهچالهی بیتیزد

سیاهچالهی بیتیزد یک حل توپولوژیک است که از حاصل تقسیم گروه هممتری فضای پاددوسیته به یک زیرگروهش به دست میآید. در نتیجه، این هندسه به طور موضعی پاددوسیته است و خمش اسکالر فضا همه جا برابر با (6-) است. هندسهی نزدیک افق رویداد سیاهچاله به طور تقریبی با رابطهی زیر داده میشود،

$$ds^2 = {r_H}^2 \rho^2 dt^2 + d\rho^2 + {r_H}^2 d\varphi^2, \qquad {r_H}^2 = 8GM$$

رابطه‌ی بین مختصات ρ و r عبارت است از $r = r_H\left(1+\frac{\rho^2}{2}\right)$ و منظور از هندسه‌ی نزدیک افق آن است که از جملات مرتبه‌ی بالاتر ρ نسبت به آن‌چه که نوشته‌ام چشم‌پوشی کنیم. این حدگیری مفید است چرا که هندسه‌ی نزدیک افق را آشکار می‌کند ولی درستی آن‌چه که در پی می‌آید متکی به آن نیست. از متریک بالا معلوم می‌شود که هندسه‌ی نزدیک افق عملا یک حلقه به شعاع r_H ضرب در یک صفحه‌ی تخت در مختصات قطبی است که مختصه‌ی شعاعی آن ρ و مختصه‌ی زاویه‌ای آن $\vartheta = r_H t$ باشد. از آن جا که دوره‌ی تناوب زمان β است پس دوره‌ی تناوب ϑ برابر است با $r_H\beta$. می دانیم که اگر در دست‌گاه قطبی دوره‌ی تناوب مختصه‌ی زاویه‌ای برابر 2π نباشد آن‌گاه در مبدا تکینه‌گی مخروطی داریم. اما همان‌طور که قبلا گفتم، سیاه‌چاله‌ی بی‌تی‌زد به طور موضعی یک فضای پاددوسیته با خمش ثابت (-6) است. پس هیچ تکینه‌گی مخروطی در فضا و از جمله در افق روی‌داد وجود ندارد. از این‌جا معلوم می‌شود که دمای سیاه‌چاله برابر با $T = r_H/2\pi$. با توجه به رابطه‌ی شعاع افق روی‌داد و جرم سیاه‌چاله و با استفاده از قانون اول ترمودینامیک که رابطه‌ی جرم و آنتروپی را به صورت $dM = TdS$ می‌دهد، آنتروپی بکنشتاین–هاوکینگ به دست می‌آید $S_{BH} = \frac{2\pi r_H}{4G}$ که برابر با آنتروپی کاردی است.

- تابع دو نقطه‌ای [SW]

فضای پاددوسیته در مختصات زیر را در نظر بگیرید،

$$ds^2 = \frac{dx^i dx^i}{(1-r^2)^2} - \frac{(1+r^2)}{(1-r^2)}dt^2, \qquad r^2 = x^i x^i \leq 1$$

مرز در r=1 قرار دارد. فرض کنید که مرز را در $r_b = 1-\delta$ قرار بدهیم که $\delta \ll 1$ یک قطع فروسرخ (IR cut-off) است. طول ژئودزیک بین دو نقطه x_1 و x_2 ($|\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2| \gg \delta$) روی «مرز بهنجار شده» با $(\log(|x_1-x_2|/\delta))$ داده می‌شود. برای به دست آوردن این رابطه می‌شود ابتدا نشان داد که در حد $\delta \ll 1$، طول ژئودزیک با $\log\delta$ رشد می‌کند. بسته‌گی به $|x_1 - x_2|$ از ملاحظات ابعادی (یعنی توجه به این که عمل لگاریتم فقط روی کمیت‌های بی‌بعد تعریف می‌شود و δ عملا بعد طول دارد) تعیین می‌شود. اگر می خواستیم در حد کلاسیک

تابع دونقطه‌ای $G(x_1, x_2)$ ذره‌ای به جرم m را حساب کنیم، از آن جا که کنش ذره با $S = m\int ds$ داده می‌شود، آن‌گاه

$$G(x_1, x_2) \simeq \exp(-S_{on-shell}) = \frac{\delta^m}{|x_1 - x_2|^m}$$

در نتیجه تابع دو نقطه‌ای یک ذره (میدان) جرم‌دار در پس‌زمینه‌ی پاددوسیته با تابع دونقطه‌ای دو میدان (شبه) اولیه در یک نظریه‌ی میدان هم‌دیس داده می‌شود. نکته‌ی مهم در این مشاهده تعبیر قطع فروسرخ δ به عنوان قطع فرابنفش (UV cut-off) در نظریه میدان دوگان است.

مراجع

[BTZ] M. Banados, C. Teitelboim, J. Zanelli, arXiv:hep-th/9204099 and arXiv:gr-qc/9302012.

[Gin] P. Ginsparg, ``Applied Conformal field theory", arXiv:hep-th/9108028.

[GrA] F. Loran, `` Note on the gravitational anomaly".

[Hen] M. Henningson and K. Skenderis, arXiv:hep-th/9806087, arXiv:hep-th/9812032 .

[Nak] M. Nakahara, ``Geometry, Topology and Physics'', ISBN 0 7503 0606 8, IOP Publishing Ltd 2003.

[Pol] J. Polchinski, ``String Theory Vol 1, An Introduction to the Bosonic String'', Cambridge University Press, New York, 2005.

[Ric] F. Loran, arXiv: hep-th/1302.4584.

[ShJ] M.M.Sheikh-Jabbari, ``Short Description of Topics in CFT course at IPM''.

[SW] L. Susskind and E. Witten, arXiv: hep-th/9805114.