



مقدمه‌ای بر دوگانی AdS/CFT

فرهنگ لران

دانش‌کده‌ی فیزیک، دانش‌گاه صنعتی اصفهان

آذر ۹۱

این درس‌نامه برای ارائه در سه درس ۴۵ دقیقه‌ای در دومین مدرسه و کارگاه AdS/CFT کاربردی تهیه شده است.

چکیده: در این درس‌نامه، پس از مقایسه‌ی تقارن‌های نظریه‌ی میدان چهاربعدی با ابرتقارن هم‌دیس $N=4$ و تقارن‌های فضا-زمان $AdS_5 \times S^5$ و مرور ره‌یافت «توفت» به نظریه‌ی میدان پیمان‌های $SU(N)$ ، صورت‌بندی دوگانی AdS/CFT را بیان می‌کنیم. با استفاده از حل‌های سیاه-۳-شامه‌های فرینه و تقریباً-فرینه، شواهد درستی این دوگانی را بررسی کرده و چند کاربرد این دوگانی به ویژه در محاسبه‌ی پتانسیل برهم‌کنش کوآرک-پادکوآرک و توضیح مساله‌ی فرسته‌گی-وافرسته‌گی را مرور می‌کنیم. این درس‌نامه عمدتاً برگرفته از مقاله‌ی hep-th/9905111 است.

استفاده از مطالب این درس‌نامه بلامانع است. لطفاً نقطه‌نظرات اصلاحی خود را به آدرس loran@cc.iut.ac.ir ایمیل کنید.

مقدمه:

هرچه که یک نظریه متقارن تر باشد، ساده تر است. برای ساده کردن یک نظریه‌ی میدان کوانتومی چهاربعدی، می‌شود علاوه بر تقارن پوانکاره چند ابرتقارن هم به نظریه اضافه کرد. اگر بخواهیم که اسپین ذرات بی‌جرم نظریه، از یک بیشتر نباشد آن گاه تعداد ابرتقارن‌ها نمی‌تواند از $N=4$ بیشتر باشد چرا که هر عمل‌گر ابرتقارن اسپین یک ذره را به اندازه‌ی $1/2$ تغییر می‌دهد. در نتیجه نظریه‌ای که شامل یک میدان بی‌جرم با هلیسیتی‌ی یک باشد آن گاه یک میدان بی‌جرم با هلیسیتی‌ی $1-N/2$ هم دارد که نباید از (-1) کم‌تر باشد.

به این ترتیب در نظریه‌ی $N=4$ با تقارن $SU(N)$ یک میدان پیمانهای اسپین یک داریم که در نمایش الحاقی گروه $SU(N)$ نشسته و چهار فرمیون (مایورانا) و شش اسکالر (حقیقی) که همه در همان نمایش الحاقی هستند آن را همراهی می‌کنند. از آن جا که چهار بار (مولد) ابرتقارنی داریم، این نظریه یک تقارن $SU(4)$ هم دارد که به آن گروه تقارن R می‌گویند. با توجه به نمودارهای دینکین معلوم می‌شود که این گروه با گروه $SO(6)$ هم ارز است. گروه $SU(4)$ را گروه تقارنی میدان‌های فرمیونی و گروه $SO(6)$ را گروه تقارن اسکالرها می‌گیریم.

تمرین: نشان دهید که با فرض وجود تقارن CPT ، محتوای دو نظریه‌ی $N=3$ و $N=4$ یکسان است. پاسخ در فصل ۲۶ کتاب نظریه‌ی میدان واینبرگ آمده است.

به جز ابرتقارن می‌شود تقارن هم‌دیس را هم به نظریه اضافه کرد. تقارن هم‌دیس فضا زمان چهاربعدی با گروه $SO(2,4)$ داده می‌شود. جبر گروه ابرتقارن هم به این ترتیب به جبر گروه ابرهم‌دیس ارتقا می‌یابد که علاوه بر ۱۶ مولد ابرتقارن اولیه (چهار مولد فرمیونی مایورانا) دارای ۳۲ بار ابرتقارنی است.

می‌بینیم که ساده‌ترین نظریه‌ی میدان (پیمانهای) چهاربعدی، تقارن $SO(2,6) \times SO(6)$ و ۳۲ ابربار دارد. می‌دانیم که تقارن $SO(2,6)$ تقارن یک فضای AdS_5 است و $SO(6)$ هم تقارن یک فضای S^5 . از طرفی در یک فضا زمان ده بعدی، نظریه‌ای که ۳۲ ابربار داشته باشد لاجرم شامل گرانش می‌شود. در واقع می‌شود دید که فضای $AdS_5 \times S^5$ یک حل از ابرگرانش نوع IIB است.

بر اساس این تقارن‌ها معقول است که ادعا کنیم که نظریه‌ی میدان چهاربعدی $SU(N)$ با تقارن ابرهم‌دیس $N=4$ هم‌ارز یک نظریه‌ی ابرگرانش ده بعدی است. با توجه به ره‌یافت توفت 't Hooft می‌دانیم که در حد N خیلی بزرگ، مشاهده‌پذیرهای یک نظریه‌ی پیمانهای با یک نظریه‌ی ریسمان هم‌ارز خواهند بود. از آن جا که ابرگرانش نوع IIB هم نظیر حد کم-انرژی نظریه‌ی ابرریسمان نوع IIB است، ادعای فوق را با قوت بیش‌تری می‌شود به صورت زیر بیان کرد:

نظریه‌ی میدان چهاربعدی $SU(N)$ با تقارن ابرهم‌دیس $N=4$ در حد $N \rightarrow \infty$ هم‌ارز نظریه‌ی ابرریسمان نوع IIB بر پس‌زمینه‌ی $AdS_5 \times S^5$ است.

در آن چه که در پی می آید ابتدا رهیافت توفت را مرور می کنیم. سپس ساختار فضای AdS و نظریه ای میدان اسکالر در فضا زمان AdS را مرور می کنیم. صورت بندی قضیه ی هولوگرافی و دوگانگی AdS/CFT را بیان می کنیم و سپس چند شاهد و کاربرد دوگانگی AdS/CFT را بررسی می کنیم.

در این درس نامه از روابط مقاله ی «مگو» hep-th/9905111 استفاده می کنیم و همه ی ارجاعات به شماره ی روابط به این مقاله مربوط می شود. در سایر موارد، منبع را صریحا ذکر می کنیم.

رهیافت توفت

همان طور که در مقدمه دیدید موضوع مورد علاقه ی ما نظریه های میدانی است که در آن میدان ها در نمایش الحاقی گروه $SU(N)$ هستند. به همین دلیل در بررسی رهیافت توفت بحث مان را به این نوع نظریه ها محدود می کنیم. کنش نوعی چنین نظریه ای با رابطه ی (۱,۳) داده می شود که البته می شود برهم کنش هایی از مرتبه ی بالاتر از چهار هم به آن اضافه کرد:

$$\mathcal{L} \sim \frac{1}{g_{YM}^2} \left[\text{Tr}(d\tilde{\Phi}_i d\tilde{\Phi}_i) + c^{ijk} \text{Tr}(\tilde{\Phi}_i \tilde{\Phi}_j \tilde{\Phi}_k) + d^{ijkl} \text{Tr}(\tilde{\Phi}_i \tilde{\Phi}_j \tilde{\Phi}_k \tilde{\Phi}_l) \right]$$

از آن جا که میدان ها در نمایش الحاقی هستند، هر میدان دو اندیس $i, j=1, \dots, N$ حمل می کند. یک اندیس را به نمایش پایه و اندیس دیگر را به نمایش پادپایه مربوط می کنیم. به این ترتیب انتشارگر میدان ها با رابطه ی (۱,۴) داده می شود.

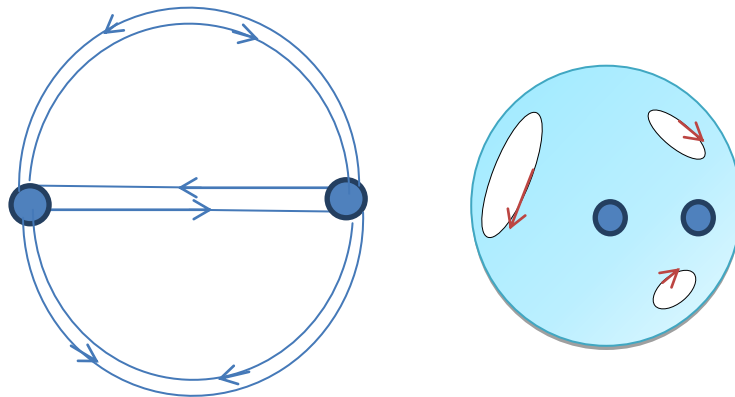


تابع دونقطه ای

$$\langle \Phi_j^i \Phi_l^k \rangle \propto (\delta_l^i \delta_j^k - \frac{1}{N} \delta_j^i \delta_l^k)$$

جمله ی دوم سمت راست این رابطه به این دلیل آمده که تریس میدان های $SU(N)$ صفر است. در حد $N \rightarrow \infty$ از این جمله چشم پوشی می شود. در رسم نمودارهای فاینمن، هر انتشارگر را با یک نوار نشان می دهیم و به جای اندیس های بالا و پایین پیکان می گذاریم.

اگر نمودارهای خالاً-به-خالاً را در نظر بگیریم با توجه به کنش (۱,۳) می‌بینیم که به ازاء هر انتشارگر یک ضریب g_{YM}^2 ، به ازاء هر رأس یک ضریب g_{YM}^{-2} و به ازاء هر حلقه (به واسطه‌ی عمل تریس) یک ضریب N به دست می‌آید. پس وزن هر نموداری که V رأس، E انتشارگر و F حلقه داشته باشد با $N^F (g_{YM}^2)^{E-V}$ داده می‌شود. دلیل این نام‌گذاری‌ها این است که با پهن کردن نوارها می‌شود هر نمودار خالاً-به-خالاً را به صورت یک رویه‌ی دو بعدی با V رأس، E یال و F وجه در نظر آورد.



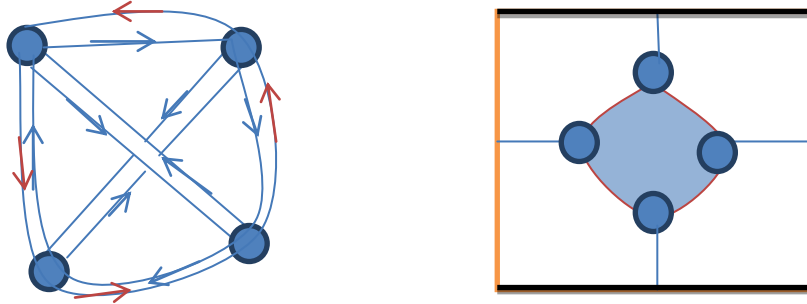
به عنوان مثال نمودار بالا دو رأس، سه یال و سه وجه دارد. عدد اویلر نظیر این نمودار با $X=V-E+F$ داده می‌شود که در مورد سطوح بسته‌ی دو بعدی برابر با $2-2g$ است که g جنس (genus) سطح را می‌دهد. در نتیجه این نمودار در عملاً یک کره‌ی دو بعدی است. برای تصور این موضوع، در ذهن‌تان دو حلقه‌ی درونی در شکل سمت چپ را تنگ‌تر کنید و کمی بالاتر از صفحه‌ی کاغذ بیاورید. هم‌زمان مرز بیرونی را تنگ کنید و به عمق ببرید. به روشنی به شکل سمت راست می‌رسید که یک کره را نشان می‌دهد. نهایتاً حلقه‌ها را در حد نقطه کوچک کنید.

با این حساب بهتر است که وزن هر نمودار را برحسب عدد اویلر بیان کنیم. برای این کار ابتدا ضریب λ را با رابطه‌ی $\lambda = g_{YM}^2 N$ تعریف می‌کنیم. برحسب این ضریب وزن هر نمودار با $N^X \lambda^{E-V}$ داده می‌شود. به این ترتیب بسط اختلالی هر نموداری با رابطه‌ی (۱,۶) داده می‌شود.

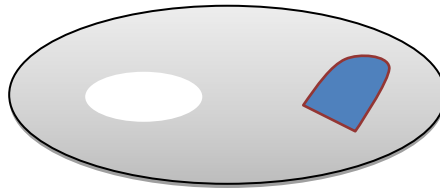
$$\sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} \sum_{i=0}^{\infty} c_{g,i} \lambda^i = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} f_g(\lambda)$$

اگر $1/N$ را هم‌ارز ثابت جفت شده‌گی ریسمان بدانیم آن‌گاه معادله‌ی (۱,۶) را می‌توان به یک بسط اختلالی برای ریسمان‌های بسته تعبیر کرد. در این جانشانی باید به توجه کنید که جهان رویه‌ی هر ریسمان بسته شبیه یک استوانه است و مثلاً اگر نمودار خالاً-به-خالاً نظیر یک ریسمان بسته را در نظر بگیریم شبیه یک چنبره می‌شود.

از شکل بسط مشخص است که در حد $N \rightarrow \infty$ سهم نمودارهای ناصفحه‌ای ($g > 0$) در برابر نمودارهای صفحه‌ای ($g = 0$) قابل چشم‌پوشی است. نمونه‌ای از چنین نموداری با چهار رأس، شش انتشارگر و دو وجه داده می‌شود:



مرز بیرونی شکل سمت چپ هم‌ارز مرز ناحیه‌ی رنگی درون شکل سمت راست است. این ناحیه یک وجه شکل را نشان می‌دهد. در شکل سمت راست اضلاع رو-به-روی هم مستطیل با هم یکی شده‌اند. برای همین هرچهار ناحیه‌ی سفید رنگ یک وجه را می‌سازند. پس عملاً یک چنبره داریم که روی آن یک چهارگوش آبی رنگ رسم شده است. به این ترتیب می‌شود خط‌های آبی رنگ نازک در شکل سمت راست را هم در راستای دو دایره‌ی سازنده‌ی چنبره تصور کرد.



فضای AdS

فضازمان AdS حل ایستای معادله‌ی اینشتین در فضای تهی و با ثابت کیهان‌شناختی منفی است. این فضازمان با معادله‌ی (۲,۲۰) داده می‌شود:

$$X_0^2 + X_{p+2}^2 - \sum_{i=1}^{p+1} X_i^2 = R^2$$

متریک (۲۳,۲) را متریک سرتاسری نامیده‌اند:

$$ds^2 = R^2(-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega^2)$$

در این دست‌گاه مختصات، مرز فضازمان در $\rho \rightarrow \infty$ ساختاری چون $R \times S^p$ دارد. البته در همسایه‌گی $\rho=0$ فضازمان شبیه به $R^{p,1}$ است. رفتار مجانبی فضازمان ما را به استفاده از دست‌گاه مختصات (۲,۲۴) ترغیب می‌کند:

$$ds^2 = \frac{R^2}{\cos^2 \theta} (-d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega^2)$$

در این دستگاه مختصات فضازمان به شکل $R \times S^{p+1}$ است و مرز در $\theta = \pi/2$ قرار دارد.

تفاوت این دو دستگاه مختصات در این است که در فضازمان $R^{p,1}$ طیف انرژی پیوسته است در حالی که در فضازمان $R \times S^{p+1}$ به دلیل دوره ای بودن فضا، طیف انرژی ذرات گسسته است. برای به دست آوردن طیف انرژی توجه کنید که به دلیل تقارن $SO(p,2)$ هر ذره‌ای در معادله‌ی موج (۲,۳۲) صدق می‌کند.

$$(\Delta - m^2) \phi = 0$$

پاسخ‌های این معادله‌ی موج با روابط (۲,۳۴) تا (۲,۳۶) داده می‌شود. شرط مرزی روی میدان‌ها از قانون بقای انرژی که با رابطه‌ی (۲,۳۸) تعریف می‌شود داده می‌شود.

$$E = \int d^{p+1}x \sqrt{-g} T_0^0$$

$$T_{\mu\nu} = 2\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} ((\partial\phi)^2 + m^2 \phi^2) + \beta(g_{\mu\nu} \Delta - D_\mu D_\nu + R_{\mu\nu}) \phi^2$$

با استفاده از متریک (۲,۲۴) می‌شود دید که

$$D_\mu T_0^\mu = \partial_0 T_0^0 + g^{-1/2} \partial_\theta (g^{1/2} T_0^\theta) + \partial_a T_0^a = 0$$

در این رابطه، اندیس a سایر مختصات را نشان می‌دهد و چون متریک به این مختصات بسته‌گی ندارد انتگرال حجمی جمله‌ی $\partial_a T_0^a$ صفر است و در نتیجه این جمله سهمی در مشتق زمانی انرژی (۲,۳۸) ندارد. در نتیجه شرط بقای انرژی با

$$g^{1/2} T_0^\theta |_{\theta=\pi/2} = 0.$$

داده می‌شود که همان رابطه‌ی (۲,۴۰) است:

$$(\tan \theta)^p [(1 - 2\beta)\partial_\theta + 2\beta \tan \theta] \phi^2 \rightarrow 0 \quad (\theta \rightarrow \pi/2).$$

در نتیجه‌ی این شرط مرزی انرژی گسسته می‌شود. طیف انرژی با رابطه‌ی (۲,۴۱) داده می‌شود و از طرفی حقیقی بودن مقدار انرژی (یکانی بودن نظریه) معلوم می‌شود که مربع جرم باید در نامساوی (۲,۴۲) صدق کند. توجه کنید که جمله‌ی جرمی در معادله‌ی موج (۲,۳۲) شامل جرم سکون و جمله‌ی جفت‌شده‌گی به خمش اسکالر است که با پارامتر β در رابطه‌ی (۲,۳۷) داده شده است. دریافت معادلی به این مساله در بخش ۲,۳ از درس‌نامه‌ی [1010.6134](https://arxiv.org/abs/1010.6134) آمده که مراجعه به آن آموزنده است.

دوگانگی AdS/CFT

دیدیم که می‌شود فضای AdS را به صورت $R \times S^{p+1}$ با مرزی به شکل $R \times S^p$ در نظر گرفت. می‌توانیم فرض کنیم که CFT روی این مرز نشسته است. به علاوه می‌شود که همیلتونی هر دو دست‌گاه را با عملگر $J_{0,p+2} = (P_0 + K_0)/2$ بسازیم که نظیر مختصه‌ی زمان در دست‌گاه مختصات سرتاسری است. در سوی CFT این همیلتونی و عمل گر بازمقیاس‌بندی با یک «دوران» به یک‌دیگر می‌روند. در نتیجه نظیر هر عمل‌گری با وزن h یک ویژه‌حالت انرژی با ویژه‌مقدار h وجود دارد. به این ترتیب می‌شود هر حالت ذرات در فضای AdS را نظیر یک حالت اولیه با وزن مشخص در CFT دانست.

در فضای AdS_{d+1} و در مختصات پوانکاره (۳,۱۷) معادله‌ی حرکت یک «موج تخت» با تکانه‌ی k از این قرار است:

$$z^{d+1} \partial_z (z^{1-d} \partial_z \phi_k) - (m^2 + k^2 z^2) \phi_k = 0$$

$$\phi_k \sim z^\lambda \quad \lambda(\lambda - d) = m^2 R^2$$

پس رفتار مجانبی میدان (یعنی در نزدیکی مرز در $z=0$) با z^Δ و $z^{d-\Delta}$ داده می‌شود که مقدار Δ با رابطه‌ی (۳,۱۴) داده می‌شود.

$$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 R^2}$$

در نتیجه نظریه به شرطی خوش تعریف است که شرط مرزی ای نظیر مُد دوم با رابطه‌ای مثل (۳,۱۵) داده شود.

$$\phi(\vec{x}, \epsilon) = \epsilon^{d-\Delta} \phi_0(\vec{x})$$

همان طور که می‌بینید این تعریف به کمک یک قطعِ فروسرخ (IR cut-off) ارائه شده است. با توجه به متریک پوانکاره (۳,۱۷)

$$ds^2 = R^2 \frac{-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2}{z^2}$$

کوچک تر کردن پارامتر قطع از طریق تبدیل $z \rightarrow \lambda z$ هم‌ارز کوچک تر کردن فاصله‌ی دو نقطه بر روی مرز است که با $\Delta x \rightarrow \lambda \Delta x$ داده می‌شود. به این ترتیب پارامتر قطع فروسرخ در AdS معادل یک پارامتر فرابنفش در CFT است. این موضوع تحت نام «رابطه‌ی UV-IR» شناخته می‌شود.

از آن جا که میدان اسکالر در فضای AdS کمیتی بی‌بعد است، بعد طولی «میدان مرزی» Φ_0 با $\Delta-d$ داده می‌شود. برای حفظ تقارن همدیس در سوی CFT این میدان باید به عمل‌گری با بعد Δ جفت شود. به این ترتیب دوگانگی AdS/CFT با رابطه‌ی (۳,۱۳) داده می‌شود

$$\langle e^{\int d^4 x \phi_0(\vec{x}) \mathcal{O}(\vec{x})} \rangle_{CFT} = \mathcal{Z}_{string} \left[\phi(\vec{x}, z) \Big|_{z=0} = \phi_0(\vec{x}) \right]$$

که البته سمت راست آن با معادله‌ی (۳,۱۵) اصلاح شده است.

به کمک این رابطه می‌شود تابع دو نقطه‌ای میدانی به وزن Δ را محاسبه کرد. نتیجه‌ی محاسبه در معادله‌ی (۳,۴۰) داده شده است. روش این محاسبه در مقاله‌ی hep-th/9802150 این گونه توضیح داده شده است: ابتدا با استفاده از تبدیل

$$x_i \rightarrow \frac{x_i}{x_0^2 + \sum_{j=1}^d x_j^2}, \quad i = 0, \dots, d$$

که در آن $x_0 = z$ ، جواب $K = c x_0^\Delta$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$K = \left(\frac{x_0}{(x_0^2 + \vec{x}^2)} \right)^\Delta$$

در حد $x^0 \rightarrow 0$ این تابع همه جا به جز در مبدا $x_j=0$ صفر است. به علاوه $K(x)$ همه جا مثبت است. پس $K(x)$ متناسب با تابع دلتای دیراک «سطحی» است. پس جوابِ نظیر شرط مرزی Φ_0 با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\phi(\vec{x}; x_0) \sim \int d\vec{x}' K(\vec{x} - \vec{x}'; x_0) \phi_0(\vec{x}')$$

با جای‌گذاری این جواب در کنش میدان اسکالر می‌بینیم که مقدار کنش روی لاک حرکت با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$S(\phi_0) \sim \int d\vec{x} d\vec{x}' \frac{\phi_0(\vec{x}) \phi_0(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^{2\Delta}}$$

در نتیجه

$$\langle O(\vec{x}) O(\vec{x}') \rangle \sim |\vec{x} - \vec{x}'|^{-2\Delta}$$

می‌بینیم که این نتیجه با تقارن هم‌دیس نظریه‌ی میدان سازگار است. چرا که از تقارن انتقالی روی مرز می‌دانستیم که تابع دونقطه‌ای باید تابعی از تفاضل مکان ذرات باشد. از تقارن دورانی می‌دانستیم که فقط اندازه‌ی این تفاضل مهم است و از تقارن بازمقیاس‌بندی می‌دانستیم که بعد تابع دونقطه‌ای، 2Δ [طول] است.

اصل هولوگرافی

به عنوان اولین دست‌آورد دوگانگی AdS/CFT در این‌جا نشان می‌دهیم که این دوگانگی قضیه‌ی هولوگرافی را توضیح می‌دهد. بر اساس اصل هولوگرافی، آنتروپی هیچ ناحیه‌ای از فضا که با سطحی به اندازه‌ی A محصور شده است از آنتروپی سیاه‌چاله‌ای به همان سطح بیشتر نیست. دلیل این امر این است که هر ماده‌ای را می‌شود به سیاه‌چاله‌ای تبدیل کرد که اندازه‌ی افق روی‌دادش قطعا از اندازه‌ی A بزرگ‌تر نیست و از آن‌جایی که در طی این فرآیند آنتروپی افزایش می‌یابد پس آنتروپی اولیه از آنتروپی سیاه‌چاله‌ای به سطح A بیش‌تر نبوده است.

آنتروپی نظریه‌ی $SU(N)$ روی کره‌ای به شعاع واحد و با قطع فرابنفش $\bar{\delta}$ با رابطه‌ی (۳،۱۹) داده می‌شود.

$$S \sim N^2 \delta^{-3}$$

چرا که در این نظریه تعداد درجات آزادی (گلوئون‌ها) متناسب با N^2 است و تعداد یاخته‌هایی به ابعاد \bar{D} که می‌شود روی کره‌ای به شعاع واحد ایجاد کرد به اندازه‌ی \bar{D}^{-3} است. پس تعداد کل درجات آزادی با رابطه‌ی (۳,۱۹) داده می‌شود که متناسب با آنتروپی است چرا که تعداد حالت‌های دست‌گاهی با n درجه‌ی آزادی چیزی مثل 2^n است. آنتروپی سیاه‌چاله‌ای که اندازه‌ی سطح افق روی‌دانش با اندازه‌ی سطح مرز $Z=\bar{D}$ برابر است با رابطه‌ی (۳,۲۰) داده می‌شود.

$$\frac{\text{Area}}{4G_N} = \frac{V_{S^5} R^3 \delta^{-3}}{4G_N} \sim N^2 \delta^{-3}$$

برای به دست آوردن تساوی دوم در این رابطه باید از معادله‌ی (۳,۳)

$$R^4 \equiv 4\pi g_s \alpha'^2 N$$

و تساوی

$$G_N \sim g_s^2 \alpha'^4$$

استفاده کرد. رابطه‌ی ثابت جهانی گرانش با ثابت جفت‌شده‌گی ریسمان از معادلات (۱,۹) و (۱,۱۳) به دست می‌آید. به هر حال نتیجه می‌گیریم که دوگانگی AdS/CFT به نوعی اصل هولوگرافی را تبیین می‌کند.

سیاه-شامه‌های سه بعدی

سیاه-شامه‌های سه بعدی، حلی از نظریه‌ی ابرگرانش نوع IIB هستند. حد فرینیه‌ی این سیاه-شامه‌ها با معادله‌ی (۳,۳) داده می‌شود که در آن اندازه‌ی بار R-R سیاه-شامه را می‌دهد:

$$ds^2 = f^{-1/2}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + f^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2)$$

$$F_5 = (1 + *) dt dx_1 dx_2 dx_3 df^{-1},$$

$$f = 1 + \frac{R^4}{r^4}, \quad R^4 \equiv 4\pi g_s \alpha'^2 N.$$

در این مختصات افق روی‌داد در $r=0$ واقع است و هندسه‌ی نزدیک افق روی‌داد با رابطه‌ی (۳,۵) داده می‌شود که یک فضای $\text{AdS}_5 \times S^5$ است:

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + R^2 \frac{dr^2}{r^2} + R^2 d\Omega_5^2$$

باید توجه کرد که شعاع هر دو مؤلفه‌ی AdS_5 و S^5 با R داده می‌شود که مقدار آن را N تعیین می‌کند. در حد جفت‌شده‌گی ضعیف ریسمان‌ها N تعداد ۳-شامه‌ها را نشان می‌دهد و این سه شامه‌ها میزبان نظریه‌ی میدان $U(N)$ با تقارن ابرهم‌دیس $N=4$ هستند. اگر این N شامه را به I دسته تقسیم کنیم گروه تقارنی به حاصل ضرب I گروه $U(N_i)$ می‌شکند. برای این منظور کافی است فرض کنیم میدان اسکالری که در نمایش الحاقی گروه $U(N)$ نشسته I ویژه‌مقدار ناصفر متفاوت داشته باشد. هندسه‌ی نظیر این پیکربندی با معادله‌ی (۳,۱۱) داده می‌شود.

ریسمان‌هایی که بین دو دسته از این شامه‌ها کشیده شده‌اند، بوزون‌های W را نشان می‌دهند. بعداً فرض می‌کنیم که هر سر این ریسمان‌ها نماینده‌ی کوارکی در نمایش پایه یا پادپایه‌ی نظیر هر شامه است. جرم W (یا کوارک نظیرش) را می‌توان به ساده‌گی محاسبه کرد. برای این کار توجه کنید که کنش ریسمان با سطح جهان‌روی‌ی آن برابر است که برای ریسمانی به طول L متناسب با TL/l_s^2 است که T زمان را نشان می‌دهد. هم‌چنین به یاد بیاورید که دامنه‌ی یک گذار در حضور این ریسمان با فازی متناسب با مقدار کنش داده می‌شود. با مقایسه‌ی این فاز با آنچه که از تحول زمانی در معادله‌ی شرودینگر به دست می‌آید معلوم می‌شود که این ریسمان نظیر حالتی با ویژه‌مقدار انرژی $m_W = L/l_s^2$ است.

ناحیه‌ی اعتبار دو توصیف

مادامی که ثابت جفت شده‌گی ریسمان‌ها (g_s) کوچک باشد نظریه‌ی ابرگرانش برای توصیف سیاه-شامه‌ها مناسب است. علاوه بر این، شعاع R باید خیلی بزرگ‌تر از طول ریسمان‌ها (l_s) باشد. از رابطه‌ی (۳,۳) و با توجه به این که $\alpha' = l_s^2$ به رابطه‌ی (۳,۱۰) به عنوان شرط اعتبار نظریه‌ی ابرگرانش می‌رسیم:

$$\frac{R^4}{l_s^4} \sim g_s N \sim g_{YM}^2 N \gg 1.$$

از سوی دیگر، توصیف شامه‌ای از این پیکربندی وقتی درست است که ثابت جفت‌شده‌گی مؤثر ریسمان‌ها که با $g_s N$ داده می‌شود بسیار کوچک باشد. از این جا شرط (۳,۹) به عنوان شرط اعتبار نظریه‌ی میدان به دست می‌آید:

$$g_{YM}^2 N \sim g_s N \sim \frac{R^4}{l_s^4} \ll 1.$$

شواهد درستی دوگانی

آنتروپی سیاه‌چاله‌ی AdS-شوارتزشیلد:

متریک نظیر چنین سیاه‌چاله‌ای با رابطه‌ی (۳,۶۷) داده می‌شود.

$$ds^2 = -f(r)d\tau^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega_3^2,$$

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{r_+^2}{r^2} \left(1 + \frac{r_+^2}{R^2} \right)$$

فرض بر این است که $r_+ \gg R$. در چنین حدی دمای سیاه‌چاله T_H متناسب با r_+/R^2 به دست می‌آید. از رابطه‌ی بکشتاین-هاوکینگ آنتروپی سیاه‌چاله با $r_+^3 R^5/G_N$ متناسب است. از سوی دیگر آنتروپی نظریه‌ی میدان با آنتروپی گازی شامل N^2 نوع ذره‌ی بی‌جرم در ظرفی به حجم R^3 و دمای T_H داده می‌شود. چگالی انرژی گاز بی‌جرم در دمای T_H با T_H^4 متناسب است. پس انرژی کل با $N^2 T_H^4 R^3$ داده می‌شود. چون $S=E/T$ آنتروپی گاز با متناسب $N^2 T_H^3 R^3$ است. از آن جا که $G_N = R^8/N^2$ می‌بینیم که آنتروپی گاز و سیاه‌چاله با هم برابرند.

0-شامه:

پیکربندی‌ای شامل $N+1$ شامه را در نظر بگیرید. که یک فضای AdS_5 را می‌سازند. یکی از شامه‌ها را از دیگران دور می‌کنیم و در فاصله‌ی $\epsilon \rightarrow 0$ از مرز قرار می‌دهیم. فرض کنید که یک 0-شامه به جرم m از نقطه‌ای روی این شامه‌ی مرزی به نقطه‌ی دیگری به فاصله‌ی $L=2a$ روی آن کشیده شده است. یک 0-شامه، یک ذره‌ی نقطه‌ای است و مکانش با یک ژئودزیک داده می‌شود. در فضای AdS ژئودزیکی که دو نقطه روی مرز را قطع کند به شکل یک نیم-دایره است. مقدار کنش با رابطه‌ی (۳,۹۶) داده می‌شود.

$$S = m \int ds = -2mR \int_{\epsilon}^a \frac{adz}{z\sqrt{a^2 - z^2}},$$

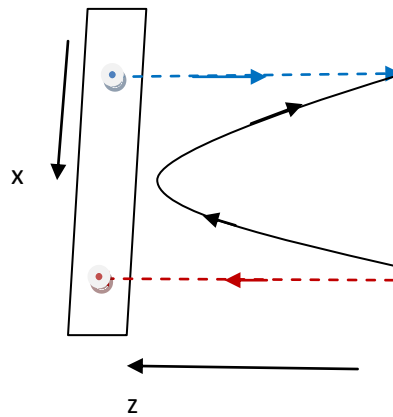
همان‌طور که می‌بینید مقدار کنش در $\epsilon \rightarrow 0$ واگراست. با حذف این واگرایی به رابطه‌ی (۳,۹۷) می‌رسیم که همان تابع دونقطه‌ای عملگری به وزن $1 \ll \Delta = mR$ است:

$$e^{-S} \sim e^{-2mR \log a} \sim \frac{1}{a^{2mR}}$$

کاربرد دوگانگی AdS/CFT در QCD

مزون در نظریه $N=4$:

در پیکربندی قبلی، فرض کنید که یک کوارک در نقطه‌ی $x=-L/2$ و یک پادکوارک در $x=L/2$ قرار داد



شده است. کنش نظیر این پیکربندی با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$S = \frac{TR^2}{2\pi\alpha'} \int_{+\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}} dx \frac{\sqrt{1 + (\partial_x z)^2}}{z^2} = -\frac{TR^2}{2\pi\alpha'} \left(2 \int_{\epsilon}^{z_0} dz \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{z^2} \right)$$

شکل خمی که ریسمان روی آن قرار دارد با کمینه کردن این کنش به دست می‌آید:

$$\frac{x'}{z^2 \sqrt{1 + x'^2}} = \frac{1}{z_0^2}$$

که در آن z_0 بیشینه‌ی z را نشان می‌دهد که به دلیل تقارن در $x=0$ واقع است. حل این معادله و مقدار z_0 در معادلات (۳,۹۲) و (۳,۹۳) داده شده‌اند. از معادله‌ی بالا به سادگی می‌شود مقدار کمینه‌ی کنش را محاسبه کرد:

$$S = -\frac{TR^2}{\pi\alpha'} \int_{\epsilon}^{z_0} dz \frac{1}{z^2 \sqrt{1 - \frac{z^4}{z_0^4}}} \sim -\frac{TR^2}{\alpha' z_0}$$

که در آن از جمله‌ی واگرا در $\epsilon \rightarrow 0$ چشم‌پوشی شده است. این جمله‌ی واگرا در واقع سهم «خود-انرژی» کوآرک و پادکوآرک را می‌دهد. مقدار z_0 از مرتبه‌ی L است. از آنجا که $S=ET$ که در آن E انرژی حالت و T زمان است، با استفاده از رابطه‌ی (3,3) می‌بینیم که

$$E \sim -\frac{\sqrt{g_{\text{YM}}^2 N}}{L}$$

شکل بسته‌گی انرژی به L از تحلیل ابعادی و با توجه به تقارن هم‌دیس مسأله مشخص بود. آن‌چه که در این رابطه مهم است شکل بسته‌گی انرژی به ثابت جفت‌شده‌گی است که با روابط اختلالی نمی‌خواند. در بسط اختلالی، مقدار E به صورت یک چندجمله‌ای از ثابت جفت‌شده‌گی $g_{\text{YM}}^2 N$ به دست می‌آید. این پدیده علی‌الاصول به پوشیده‌گی بار (charge-screening) مربوط است و دوگانگی AdS/CFT جزئیات این پدیده در حد جفت‌شده‌گی‌های قوی را به دست می‌دهد.

QCD₃

مسأله‌ای که در این جا بررسی می‌کنیم کاربرد دوگانگی در مطالعه‌ی دست‌گاهی است که ابرمتقارن نیست. به یاد بیاورید که در مختصات پوانکاره، مرز فضای AdS به صورت $R^{3,1}$ دیده می‌شود. فرض کنید که با یک دوران ویک (Wick-rotation) به فضای R^4 برویم و با گرد کردن مختصه‌ی که تا پیش از دوران ویک مختصه‌ی زمان بود بر دایره‌ای به شعاع R_0 ، مرز را به صورت $S^1 \times R^3$ در بیاوریم. حالا دوباره با یک دوران ویک می‌شود فضازمانی به شکل $S^1 \times R^{2,1}$ بسازیم!

با در نظر گرفتن شرط پاد-دوره‌ای برای فرمیون‌ها همه‌ی آن‌ها جرمی متناسب با وارون شعاع S^1 پیدا می‌کنند. به این ترتیب ابرتقارن کاملاً می‌شکند و اثر حلقه‌های کوانتومی به اسکالر‌ها هم جرمی از مرتبه‌ی R_0^{-1} می‌دهد. در نتیجه در حد R_0 کوچک فرمیون‌ها و اسکالر‌ها حذف می‌شود و آن‌چه که باقی می‌ماند نظریه‌ی QCD سه بعدی خواهد بود.

هندسه‌ی دوگان این نظریه در واقع نه با سیاه-۳-شامه‌های فرینه که با سیاه-۳-شامه‌های تقریباً-فرینه (near-extremal) داده می‌شود. متریک سیاه-۳-شامه‌ها با معادله‌ی (۶,۲۲) داده می‌شود که افقی در u_0 دارد:

$$ds^2 = \alpha' \sqrt{4\pi g_s N} \left(u^2 (h(u) d\tau^2 + \sum_{i=1}^3 dx_i^2) + h(u)^{-1} \frac{du^2}{u^2} + d\Omega_5^2 \right)$$

$$h(u) = 1 - \frac{u_0^4}{u^4}$$

مقدار u_0 معیار انحراف از فرینگی است که به تفاضل شعاع افق داخلی و خارجی هندسه‌ی سیاه-۳-شامه‌ها مربوط می‌شود.

تمرین: با استفاده از حل سیاه-p-شامه که با معادله‌ی (۱,۱۲) داده می‌شود، متریک (۶,۲۲) را در حد $r \rightarrow r_+$ و با جای‌گذاری $r^4 = \rho^4 - r_+^4$ (شبيهه به معادله‌ی (۱,۲۰)) به دست آورید.

از متریک (۶,۲۲) معلوم است که رویه‌ی T-U در $u=0$ یک تکینه‌گی مخروطی دارد مگر این که رابطه‌ی (۶,۲۴) برقرار باشد:

$$u_0 = \frac{1}{2R_0}$$

دقیقا به همین دلیل است که در این ره‌یافت QCD_3 دوگان سیاه-۳-شامه‌ی تقریبا-فرینگی اقلیدسی است.

بر اساس تحلیل ابعادی معلوم است که ثابت جفت‌شده‌گی QCD_3 برحسب ثابت جفت‌شده‌گی بی‌بعد g_{YM} با رابطه‌ی $g_3^2 = g_{YM}^2 / R_0$ داده می‌شود. پس در حد مورد نظر ما، ثابت جفت‌شده‌گی QCD_3 خیلی بزرگ است. از بازبهنجارش ویلسون می‌دانیم که g_3 یک ثابت جفت شده‌گی «مربوط» (relevant) است که در حد انرژی‌های پایین رشد می‌کند و توصیف ما هم در ناحیه‌ی IR در مقایسه با مقیاس انرژی R_0^{-1} است.

از روش‌های شبیه‌سازی روی شبکه معلوم شده است که در حد فرسوخ در نظریه‌ی QCD_3 ، پتانسیل برهم‌کنش کوارک-پادکوارک در یک مزون به طور خطی با فاصله‌ی آن‌ها رشد می‌کند. به یاد بیاورید که در نظریه‌ی ابرمتقارن دیدیم که به دلیل تقارن هم‌دیس این انرژی با وارون فاصله داده می‌شد. در آن مسأله، با کشیده شدن مزون و افزایش فاصله‌ی کوارک‌ها تا L ، فاصله‌ی دورترین نقطه‌ی ریسمانی که بین دو کوارک کشیده شده بود تا مرز Z_0 از همان مرتبه‌ی L بود. با افزایش فاصله‌ی کوارک‌ها ریسمان هرچه بیش‌تر به افق نزدیک می‌شود. برخلاف مسأله‌ی سیاه-۳-شامه‌ی فرینگی، در هندسه‌ی دوگان QCD_3 ریسمان در u_0 به «افق» می‌رسد و دیگر کشیده نمی‌شود. از این نقطه به بعد با افزایش L طول ریسمان هم افزایش می‌یابد. از آن‌جا که طول ریسمان را هم‌ارز انرژی

برهم کنش کوآرک-پادکوآرک می دانیم، از این جا معلوم می شود که با افزایش L ، انرژی هم افزایش می یابد. برای پیدا کردن شکل این بسته گی دقت کنید که سطح ریسمان با جذر دترمینان متریک داده می شود. در نتیجه برای ریسمانی که مثلاً در راستای $t-x$ متریک $(6,22)$ (در فضای $R^{2,1}$) کشیده شده، مقدار انرژی با رابطه ی زیر داده می شود:

$$E = \sigma L$$

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi g_s N} u_0^2 = \frac{(g_s N)^{1/2}}{4\sqrt{\pi} R_0^2}$$

به جز بسته گی به L نکته ی مهم در این رابطه، شکل بسته گی به ثابت جفت شده گی است که شبیه به مساله ی $N=4$ است. همین طور نحوه ی بسته گی به دمای سیاه چاله مهم است:

$$E \sim \sqrt{g_s N} T_{\text{BH}}^2 L$$

که در آن دمای سیاه چاله متناسب با وارون شعاع S^1 یعنی متناسب با u_0 است. رابطه ی بالا شبیه انرژی یک ظرف گاز یک بعدی از ذرات بی-جرم در دمای T_{BH} است.

تمرین: این نتیجه را توجیه کنید.

آنتروپی سیاه-۳-شامه های تقریباً-فرینه

آنتروپی بکنشتاین-هاوکنگ سیاه-۳-شامه ی تقریباً-فرینه متناسب با $R^8 u_0^3 \sim R^8 T_{\text{BH}}^3$ است. انرژی یک گاز چهاربعدی بی جرم در دمای T_{BH} با رابطه ی $E \sim T_{\text{BH}}^4$ داده می شود. در نتیجه آنتروپی سیاه-۳-شامه های تقریباً-فرینه از یک نظریه ی میدان چهاربعدی به دست می آید. برای بحث بیشتر مقاله ی hep-th/9602135 و بخش ۳،۶ از مقاله ی مگو را ببینید.

گذار فرسته گی-وافرسته گی

در حضور سیاه-۳-شامه ی تقریباً فرینه، (بدون دوران های ویک که در بحث QCD_3 مطرح کردیم)

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (-f dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{R^2}{z^2 f} dz^2, \quad f(z) = 1 - \frac{z^4}{z_0^4}$$

بر حسب فاصله‌ی دو کوارک، کمینه‌ی کنش ریسمانی که بین کوارک و پادکوارک کشیده شده نظیر پیکربندی‌ای شامل دو ریسمان جداگانه است (به این معنی که ریسمان اولیه پاره شود). در این حالت، کوارک و پادکوارک سازنده‌ی مزون به یکدیگر مقید نیستند. بخش ۵,۴,۲ از مقاله‌ی [1101.0618](#) و بحث آخر بخش ۵,۴,۳ را ببینید.

سپاس‌گزاری

از برگزارکننده‌گان دومین مدرسه و کارگاه AdS/CFT کاربردی که به من فرصت شرکت و سخن‌رانی در این همایش را دادند و از دانش‌گاه فردوسی مشهد، به ویژه از هم‌کاران خوبم آقای دکتر قدسی و آقای دکتر گروسی به خاطر فراهم کردن امکان برگزاری این مدرسه متشکرم. صمیمانه سپاس‌گزار سایر شرکت‌کننده‌گان در مدرسه هستم که با بیان سوال‌ها و نقطه‌نظرات‌شان به ارائه‌ی به‌تر این درس کمک کردند.